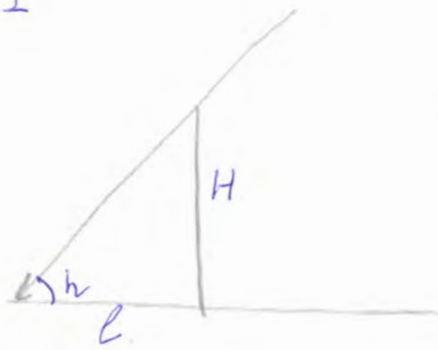
ТОМ – 2.
(стр 1).

№1



$$tg\,h = \frac{H}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{H}{tg\,h}.$$

Возможно две ситуации:

1) $h_{max} = 90 - \varphi + \varepsilon$
$h_{min} = 90 - \varphi - \varepsilon.$
(Если $|\varphi| > \varepsilon$) т.е. дальше на север или юг от тропика

2) $h_{max} = 90^\circ$
$h_{min} = 90 - \varphi - \varepsilon.$
(Если $|\varphi| < \varepsilon$) т.е. между экватором и тропиком.

Рассмотрим сначала случ. 2:

$$\ell_{min} = 0$$
$$\ell_{max} = \frac{H}{tg(90-(\varphi+\varepsilon))} = H\,tg(\varphi+\varepsilon) \Bigg\} \Rightarrow H\,tg(\varphi+\varepsilon) = 2H.$$
$$tg(\varphi+\varepsilon) = 2;$$
т.к. $tg\,60 = \sqrt{3} \approx 1{,}7$

$\Rightarrow \varphi + \varepsilon > 60^\circ \Rightarrow \varphi > 60^\circ - \varepsilon = 60 - 23 = 37^\circ$ т.к. $\varphi > 37^\circ \Rightarrow$ он вне тропической зоны $\rightarrow$ такого случая быть не может.

Теперь случ. 1:

$$\ell_{min} = \frac{H}{tg(90-(\varphi-\varepsilon))} = H\,tg(\varphi-\varepsilon)$$
$$\ell_{max} = \frac{H}{tg(90-(\varphi+\varepsilon))} = H\,tg(\varphi+\varepsilon)$$
$$\Rightarrow H\left(tg(\varphi+\varepsilon) - tg(\varphi-\varepsilon)\right) = 2H;$$
$$tg(\varphi+\varepsilon) - tg(\varphi-\varepsilon) = 2;$$
$$\frac{tg\varphi + tg\varepsilon}{1 - tg\varphi\, tg\varepsilon} - \frac{tg\varphi - tg\varepsilon}{1 + tg\varphi\, tg\varepsilon} = 2;$$

$$tg\varphi + tg\varepsilon + tg^2\varphi\, tg\varepsilon + tg\varphi\, tg^2\varepsilon - tg\varphi + tg\varepsilon + tg^2\varphi\, tg\varepsilon - tg\varphi\, tg^2\varepsilon = 2(1 - tg^2\varphi\, tg^2\varepsilon);$$

$$2tg\varepsilon + 2tg^2\varphi\, tg\varepsilon = 2(1 - tg^2\varphi\, tg^2\varepsilon);$$

$$tg^2\varphi(tg\varepsilon + tg^2\varepsilon) = 1 - tg\varepsilon;$$

$$tg\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 - tg\varepsilon}{tg^2\varepsilon + tg\varepsilon}}, \qquad \varepsilon = 23^\circ \Rightarrow tg\varepsilon = tg23 \approx \frac{23}{57} \approx 0{,}4$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{0{,}6}{0{,}56}} = \pm\sqrt{1 + \frac{4}{56}} \approx \pm 1 \Rightarrow \underline{\varphi = \pm 45^\circ} \text{ – Ответ.}$$

N°5

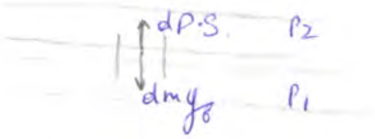
Сначала определим ускорение g, которое имеет пробное тело на высоте h (верт. компоненту)

$$g_в = g\cos\alpha = g\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} = g\sqrt{\frac{h^2}{r^2+h^2}} = g\sqrt{\frac{1}{(\frac{r}{h})^2+1}}$$, т.к.

диск тонкий => его масса мала и его самогравитацией можно пренебречь,

$h \ll r \Rightarrow g_в = g\cdot\frac{h}{r} = \frac{GM}{r^3}\cdot h$ (0)

Теперь найдем условие гидростат. равновесия:



$P_1 > P_2$.

$$dP\cdot S = dm\, g_в,\quad dm = S\rho\, dh$$

$dP = \rho g_в\, dh$, но т.к. при $dh>0$, $dP<0$ (т.е. давление с высотой убывает) => $dP = -\rho g_в\, dh$. (1)

Т.к. газ в термодинамическом равновесии => работает ур-е идеального газа:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT} \Rightarrow P = \frac{RT}{\mu}\rho \Rightarrow dP = \frac{RT}{\mu}d\rho.\ (2)$$

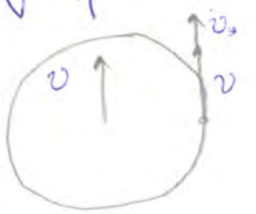
Подставляя (2) в (1): $\frac{RT}{\mu}d\rho = -\rho g_в\, dh$, подставляя сюда (0) =>

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{GM\mu}{RTr^3}\int_0^H h\, dh;$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{GM\mu}{2RTr^3}\cdot H^2 \Rightarrow \rho = \rho_0\cdot e^{-\frac{GM\mu}{2RTr^3}\cdot H^2}$$, где ρ_0 — плотность в плоскости симметрии диска ($\rho(0)=\rho_0$).

=> Ответ: $\rho(H) = \rho_0\cdot e^{-\frac{GM\mu}{2RTr^3}\cdot H^2}$

N°4



$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_ч - \lambda_0}{\lambda_0}$; $\frac{v + v_э}{c} = \frac{\lambda_к - \lambda_0}{\lambda_0}$

ТОМ-2 (стр 3)

$\Rightarrow \frac{v_э}{c} = \frac{\lambda_к - \lambda_ч}{\lambda_0} \Rightarrow v_э = c \cdot \frac{\lambda_к - \lambda_ч}{\lambda_0}$

$= 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,1}{5170,7} \approx 6\ \frac{км}{с}$.

Это нижняя оценка, т.к. если экватор наклонён к лучу зрения, то это только лучевая компонента всей скорости.

Звезда вращается быстро, что бы они не разлетались. $v < \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$\Rightarrow v^2 < \frac{GM}{R}$; $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \Rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$

$\Rightarrow v^2 < \frac{G \cdot M}{\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \cdot M^{1/3}}$; $M^{2/3} > \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \cdot \frac{v^2}{G}$;

$M > \sqrt{\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)} \cdot \frac{v^3}{\sqrt{G^3}}$;

$M > \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G^3}} \cdot v^3 \Rightarrow M_{min} = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G^3}} \cdot v^3 \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг $\approx 3 \cdot 10^{-6} M_\odot$

$R_{min} = \frac{v}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} \approx 10\,000$ км $\approx 1,4 \cdot 10^{-2} R_\odot$

Молекулярные линии поглощения ~~линии~~ наблюдаются при температуре порядка: $T = 1000K - 1500K$

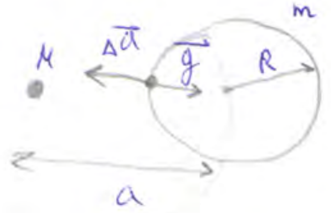
$\Rightarrow \frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 \approx 10^{-7}$

Ответ: $10^{-7} L_\odot$

№2

Сначала определим большую полуось:

$$\frac{T^2 M}{a^3} = 1 \Rightarrow a = (T^2 M)^{1/3} \approx 2\cdot 10^{-3}\ \text{а.е.} = 300\,000\ \text{км}.$$



В неИСО, движущейся вместе с планетой с ускорением $a_0 = \frac{GM}{a^2}$, край планеты притягивается к пульсару с ускорением Δa, а к планете с ускорением g. Чтобы планета не развалилась, нужно, чтобы $g > \Delta a$.

$$g = \frac{Gm}{R^2}, \quad \Delta a = \left|\frac{da}{dr}\right| \cdot R = \frac{2GMR}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{Gm}{R^2} > \frac{2GMR}{a^3} \Rightarrow R < a\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{2M}} \Rightarrow R_{max} = a\sqrt[3]{\frac{m}{2M}} \approx$$

$$\approx a\cdot 1{,}7\cdot 10^{-1} \approx 50\,000\ \text{км}$$

~~Теперь вычислим~~ $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3m}{4\pi R^3} \Rightarrow \rho_{min} = \frac{3m}{4\pi R_{max}^3}$

$m = 14{,}5 M_{Ю} \approx 14{,}5\cdot 10^{-3} M_\odot = 29\cdot 10^{27}$ кг.

$\rho_{min} \approx 60$ г/см³ — Это очень плотное в-во, которое не встречается ~~на~~ Земле при такой плотности.

Ответ: $\rho > 60$ г/см³.

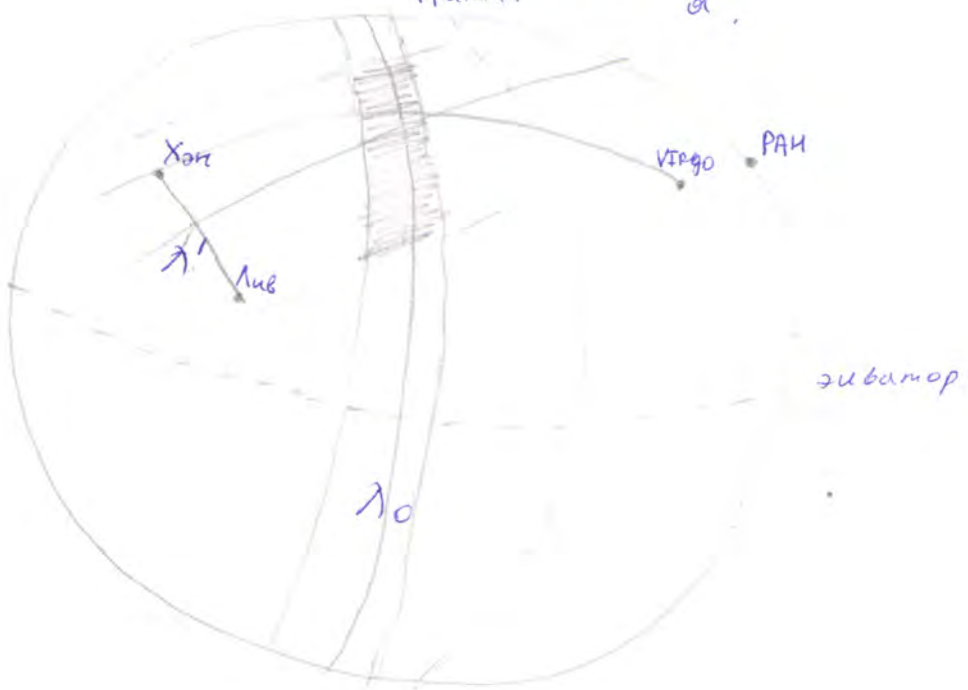
№ 3

Если d - расстояние между станциями, то Δl - разница расстояний, которое прошел сигнал до станций $\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta l}{c}$ - задержка. Скорость грав волн $= c = 3\cdot10^5$ км/с.

$\Rightarrow \Delta t < 3\cdot10^{-3}$ с $\Rightarrow \frac{\Delta l}{c} < 3\cdot10^{-3}$ с $\Rightarrow \Delta l < 3\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^5 = 900$ км

Из треуг: $\Delta l = d\cos\varphi \Rightarrow d\cos\varphi < 900$ км;

$\cos\varphi < \frac{900 \text{ км}}{d}$.



Определим расстояние между Хэн и Virgo:

$r = R\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) \approx R\cdot0{,}7 \approx 4500$ км.

$d = \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos130^\circ}$ $\quad \cos130 = -\cos50 = -\sin40 \approx -0{,}7$.

$= r\sqrt{3{,}4} \approx 8000$ км.

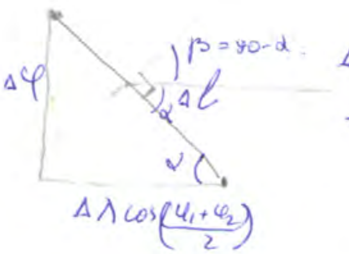
$\cos\varphi < \frac{900}{8000} \approx \frac{9}{80} \approx \frac{1}{9} \Rightarrow \sin(90-\varphi) < \frac{1}{9}$; $\varphi > 90 - \frac{57}{9} = 84^\circ$.

$\Rightarrow$ не далее чем 6° от ср перпендикуляра по небесной сфере (а значит и ср. перп. по Земле.

№ 3 (продолж)

ТОМ-2 (стр 6).

Сделаем также с Хэн-Лив: здесь можно считать участок плоским:



$$\Delta l = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + \left(\Delta\lambda \cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\right)^2} \approx 28^\circ = 3100 \text{ км}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi < \frac{900}{3100} = 0{,}3 \Rightarrow \sin(90-\varphi) < 0{,}3$$

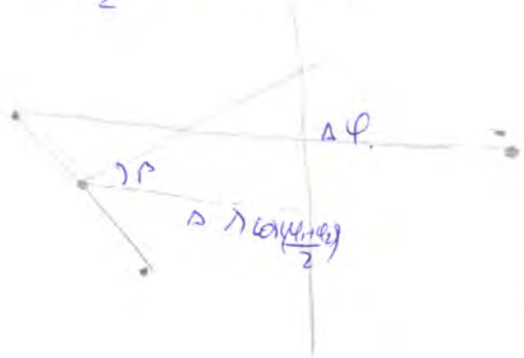
$$\Rightarrow \varphi > 73^\circ$$

$\Rightarrow$ не более 17° от сер. черп.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda \cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} \approx \frac{15}{24} \Rightarrow \alpha \approx \frac{15 \cdot 57}{24} \approx 36^\circ \quad \Rightarrow \beta = 90 - \alpha = 54^\circ$$

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_{\text{хэн}} + \lambda_{\text{virgo}}}{2} = 70^\circ_{\text{з.д.}}$$

$$\lambda' = \frac{\lambda_{\text{хэн}} + \lambda_{\text{лив}}}{2} = 105^\circ \text{ з.д.} \quad \Rightarrow \Delta\lambda = 35^\circ$$



$$\Delta\varphi = \Delta\lambda \cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$\approx 35 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}7 = 42^\circ$$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_{\text{хэн}} + \varphi_{\text{лив}}}{2} = 38^\circ.$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi = 80^\circ.$$

$\lambda = \lambda_0 = 70^\circ$ з.д. – это примерные коорд. точки, в которой объект находится в зените.

Посмотрим, какие коорд. объекты будут этому соотв.:

$h_{\text{вк}} = 90 - \varphi + \delta = 90 \Rightarrow \varphi = \delta \Rightarrow \delta = 80^\circ$

$t = 0^h \Rightarrow S = \alpha$, $S = \alpha_\odot + t_\odot = \alpha_\odot + T_\odot - 12^h$, $\underset{\approx 18^h}{\alpha_\odot \approx 278^\circ}$, $T_\odot = 22^h - 4^h 40^m = 17^h 20^m$

$\Rightarrow \alpha = 18^h + 5^h 20^m = 23^h 20^m$. Т.к. мы сильно округляли и приближали $\Rightarrow \alpha \approx 0^h$

Определим, будет ли она видна в Рай: ~~$\alpha_\odot + t_\odot = \alpha + t \Rightarrow t = (\alpha_\odot - \alpha) + t_\odot$~~

Он точно будет незаходящим тел, т.к. $\delta + \varphi - 90 > 0$. В 22^h UT, в Рай будет $= 22^h - 2^h 40^m = 19^h 20^m$ – в это время у них точно Солнце зашло $\Rightarrow$ наблюдать можно, тогда координата оценена правильно.

~~Ответ: δ = 80°.~~ Ответ: $\delta = +80^\circ$; $\alpha = 0^h$.