Задача № 1

Отношение длины гномона L и длины тени l:

$\frac{L}{l} = tg\, h$, где h - высота Солнца в ВК

$\Delta l = 2L$ - по условию $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{tg\, h_2} - \frac{1}{tg\, h_1} = 2$$

$$tg\, h_1 + tg\, h_2 = 2\, tg\, h_1\, tg\, h_2$$

$$h_1 = 90^\circ - \varphi + \varepsilon$$
$$h_2 = 90^\circ - \varphi - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\, h_1 = tg(\varphi - \varepsilon)$$
$$ctg\, h_2 = tg(\varphi + \varepsilon)$$

$$tg(\varphi + \varepsilon) - tg(\varphi - \varepsilon) = 2$$

$$\frac{tg\varphi + tg\varepsilon}{1 - tg\varphi\, tg\varepsilon} - \frac{tg\varphi - tg\varepsilon}{1 + tg\varphi\, tg\varepsilon} = 2$$

$tg\,\varphi = x$

$tg\,\varepsilon = a$

$$\frac{(x+a)(1+ax) - (x-a)(1-ax)}{1 - a^2x^2} = 2$$

$$x^2 = \frac{2(1-a)}{a(a+2)} = 1.085$$

$x = 1.09 \Rightarrow \varphi \approx \pm 48^\circ$ (в ЮП очевидно так же)

Ответ: $\varphi = \pm 48^\circ$

Задача № 2

1) $M_s = 2.8 \cdot 10^{30}$ кг

$M_p = 14.5\, M_{Ю} \approx 2 \cdot 10^{28}$ кг

$$T = \frac{2\pi a^{1.5}}{\sqrt{G(M_s+M_p)}} \approx \frac{2\pi a^{1.5}}{\sqrt{GM_s}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_sT^2}{4\pi^2}}$$

$$\frac{a^3}{a_\oplus^3} = \frac{T^2}{T_\oplus^2} \cdot 1.4 \approx \left(\frac{0.03}{360}\right)^2 \cdot 1.4 =$$

$$= \left(\frac{10^{-2}}{120}\right)^2 = \frac{10^{-8}}{1.2^2} = \frac{10^{-8}}{1.44} \cdot 1.4 = 10^{-8}$$

$$a^3 = 10^{-8} a_\oplus^3$$

$$a = 10^{-\frac{8}{3}} a_\oplus \approx \frac{1}{350} \text{ ае} = \frac{1.5 \cdot 10^8}{350} \text{ км} =$$

$$= \frac{1.5}{3.5} 10^6 \text{ км} = 4.3 \cdot 10^5 \text{ км}$$

2) Спутник должен выдерживать приливные силы пульсара:

$$\frac{GM_s}{a^2} - \frac{GM_s}{(a+R)^2} = \frac{GM_p}{R^2} \qquad \frac{M_s}{M_p} = \delta >> 1$$

$$\delta(a+R)^2R^2 - \delta a^2R^2 = a^2(a+R)^2$$

$$\delta\left((a^2+2aR+R^2)R^2 - a^2R^2\right) = a^2(a^2+2aR+R^2)$$

$$2aR^3\delta = a^4 + 2a^3R + a^2R^2$$

$$2R^3\delta = a^3 + 2a^2R + aR^2$$

Задача № 2

$2R^3\delta - 2a^2R - aR^2 - a^3 = 0$

R на порядок меньше, чем a =>

=> $\left(\frac{R}{a}\right)^n << 1$ для $n \geq 2$

$2\frac{R^3}{a^3}\delta - 2\frac{R}{a} - \frac{R^2}{a^2} - 1 = 0$, $\frac{R^2}{a^2} \to 0$

$\frac{R}{a} = \beta$

$2\beta^3\delta - 2\beta - 1 = 0$

$\beta^3\delta - \beta - 0.5 = 0$

$140\beta^3 - \beta - 0.5 = 0$

Подбор решения:

$\beta \approx 0.17$ =>

=> $R = \beta a = 73.1$ тыс км

$\rho = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2 \cdot 10^{28}}{1.33 \cdot 3.14 \cdot 7.3^3 \cdot 10^{21}} =$

$= \frac{2 \cdot 10^{7}}{4 \cdot 5.12} \approx \frac{2.0 \cdot 10^3}{2.0} = 1000 \frac{кг}{м^3}$

Это близко к плотности газовых планет и кор. карликов и равняется плотности воды.

Задача № 4

1) $c z = v$

$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$

Луч. скорость звезды в центре диска:

$v_r = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} c = \frac{4.1-0.7}{5170.7} c = \frac{3.4\cdot 3\cdot 10^8}{5.2\cdot 10^3} =$

$= \frac{10^9}{5.2\cdot 10^3} \approx 0.2\cdot 10^6 \frac{м}{с} = 200 \frac{км}{с}$

Луч. скорость на экваторе:

$v_{r\,экв} = \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_1} c = \frac{\lambda_{экв} - \lambda_1}{\lambda_1} c$

~~Vr~~ Скорость вращения:

$v = v_{r\,экв} - v_r = c\left(\frac{\lambda_{экв} - \lambda_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_c - \lambda_1}{\lambda_1}\right) =$

$= \frac{\lambda_{экв} - \lambda_c}{\lambda_1} c = \frac{0.1}{5.2\cdot 10^3} c = \frac{0.1\cdot 3\cdot 10^8}{5.2\cdot 10^3} =$

$= \frac{1}{34} v_r = 5.9$ км/с

2) Динамический закон вдоль радиальной оси:

$$\frac{GM}{R^2} - \frac{v^2}{R} - \frac{\sigma T^4}{c m_p} = 0$$

$$\sigma T^4 = \frac{3L}{4\pi R^3} \Rightarrow GMR - v^2R^2 - \frac{3L}{4\pi c m_p} = 0$$

Задача № 4

$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{4\pi G \rho R^4}{3} - v^2 R^2 - \frac{\cancel{3L}}{\cancel{4\pi c m_p}} = 0$ $\rightarrow 0$

$\frac{4\pi G \rho R^2}{3} = v^2$

$R^2 = \frac{3v^2}{4\pi G \rho} = \frac{3 \cdot 5.9^2 \cdot 10^6}{4 \cdot 3.14 \cdot 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 7 \cdot 10^3} =$

$= \frac{10^8}{5.9 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{6} \cdot 10^{15}$

$R = 0.13 \cdot 10^7 = 1.3 \cdot 10^6$ м $= 1.3 \cdot 10^3$ км

It's a plane?

3) не пренебрегаем L:

$L(R) = \frac{4}{3}\pi c m_p \left(\frac{4}{3}\pi G \rho R^4 - v^2 R^2 \right)$

$L(R^2)$ – парабола:

$L(R^2) = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 G c m_p \rho R^4 - \frac{4}{3}\pi c m_p v^2 R^2$

min: $L(R^2)_{min} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 0.05 R_\odot$

Задача № 5

1) Будем считать газ идеальным:

$P = \frac{\rho}{\mu} RT$ — ур. сост. ид. газа

$P = nkT$;

$\rho = \frac{\mu P}{RT}$;

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g_z = -\rho g_z(z).$$

Будем считать диск бесконечной пластинкой с постоянной пов. плотностью. Тогда из теоремы Гаусса компонента ускорения от диска:

$g_z(z) = 4\pi G \sigma$, где σ — пов. плотность.

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(z)\,dz \approx \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \rho(z)\,dz.$$

Этой компонентой можно пренебречь.

$$g_z(z) = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{GMz}{r^3}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{GMz}{r^3} = -\frac{\mu P}{RT} \frac{GM}{r^3} z$$

$$\ln P = -\frac{\mu}{RT} \cdot \frac{GM}{r^3} \cdot \frac{z^2}{2}$$

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu GM}{2RTr^3} z^2}$$ P_0 — давление в центре диска (на пл-ти симм.)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = [\text{зачёркнуто}]\, e^{-\frac{\mu GM z^2}{2RTr^3}}$$; ρ_0 — плотность в центре диска (на пл-ти симм.)

Задача № 3

1). Для координат источника должны выполняться условия:

1.) Окрестности центра описанной вокруг грави-телескопов сферической малой окружности

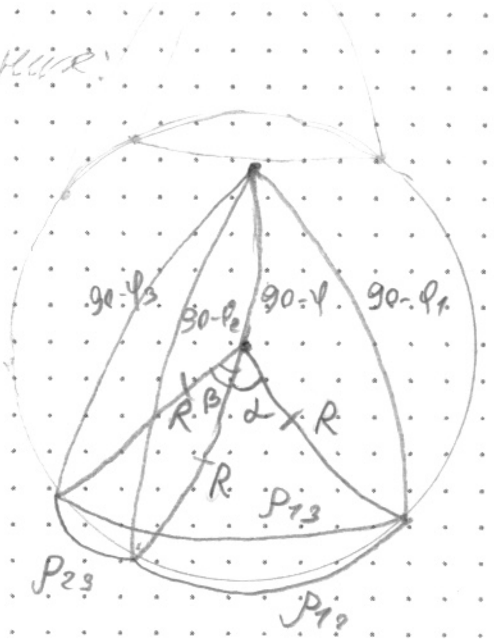
2) Наблюдаемость в САО в 22^h00^m UT 31 декабря.

Определим равноудалённую от грави-телескопов точку:

Имеем три р/б треугольника $R-R-\rho_{ij}$;

Правило Непера для них:

$$(1)\begin{cases}\sin\frac{\rho_{12}}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin R\\ \sin\frac{\rho_{23}}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\sin R\\ \sin\frac{\rho_{13}}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin R\end{cases}$$



сл. стр.

Задача № 3

$\cos \rho_{12} = 0.68 \cdot 0.50 + 0.72 \cdot 0.86 \cdot 0.17 = 0.45$

$\cos \rho_{23} = 0.50 \cdot 0.71 + 0.86 \cdot 0.69 \cdot 0.87 = 0.88$

$\cos \rho_{13} = 0.68 \cdot 0.71 + 0.72 \cdot 0.69 \cdot (-0.32) = 0.32$

$\rho_{12} = 63^\circ$

$\rho_{23} = 28^\circ$

$\rho_{13} = 71^\circ$

индексы:

1 - VIRGO

2 - LIGO в Ливингстоне

3 - LIGO в Хэнфорде

$A = \sin \frac{\rho_{12}}{2} = 0.52$

$B = \sin \frac{\rho_{23}}{2} = 0.23$

$C = \sin \frac{\rho_{13}}{2} = 0.58$

из (1): $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{A}{B}$

$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{B}{\sin R}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{A}{\sin R}$

$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} =$

$= \frac{A}{\sin R} \sqrt{1 - \frac{B^2}{\sin^2 R}} + \frac{B}{\sin R} \sqrt{1 - \frac{A^2}{\sin^2 R}}$

Задача № 3

$$C = A\sqrt{1-\frac{B^2}{\sin^2 R}} + B\sqrt{1-\frac{A^2}{\sin^2 R}}$$

$$C = A\cos\frac{\beta}{2} + B\sqrt{1-\frac{A^2}{B^2}\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$C^2 + A^2\cos^2\frac{\beta}{2} - 2AC\cos\frac{\beta}{2} = B^2\left(1-\frac{A^2}{B^2}\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = x$$

$$C^2 + A^2x^2 - 2ACx = B^2 - A^2 + A^2x^2$$

$$-2ACx = B^2 - A^2 - C^2$$

$$x = \frac{B^2 - A^2 - C^2}{-2AC} = 0.93$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{1-x^2} = 0.12$$

$\beta =$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{A}{B}\sin\frac{\beta}{2} = 0.27$$

$\alpha =$

$$\sin R = \frac{B}{\sin\frac{\beta}{2}} > 1$$

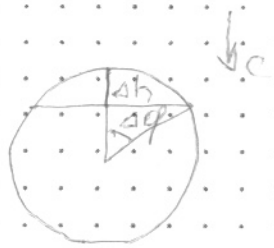
* Грустная музыка

~~Дополнительные решения~~

Задача № 3

2) Найдём, насколько велика погрешность координат:

$c\Delta t = \Delta h$



$\Delta h = 3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} =$
$= 9 \cdot 10^5$ м $= 9 \cdot 10^2$ км $=$
$= 900$ км.

$\cos \Delta\varphi = \frac{R - \Delta h}{R} = 1 - \frac{\Delta h}{R} = 1 - \frac{900}{6400} \approx$
$\approx 1 - \frac{100}{700} = \frac{6}{7} \approx 0.46$

$\Delta\varphi = 63^\circ$ Это очень много

Значит, точного ответа, пользуясь только условием 1 нельзя. Необходимо учитывать, что объект ровно через полчаса пронаблюдался в САО.