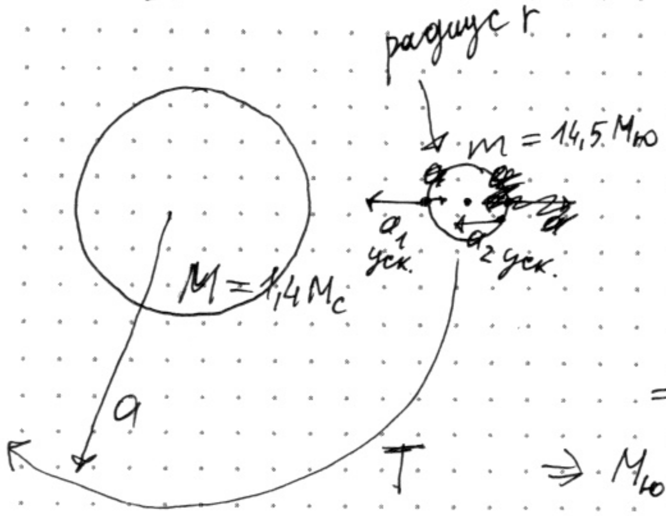
Задача № 2



$d_{юпитера} \approx 8\, d_{земли} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{юпитера} \approx 8^3 V_{земли} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_{юпитера} < \rho_з \cdot 8^3 V_{земли} =$

$= 512\ M_з$, т.к. $\rho_з > \rho_ю \Rightarrow$

$\Rightarrow M_ю < 512 \cdot 6 \cdot 10^{24}$ кг $\approx 3 \cdot 10^{27}$ кг

$\frac{3 \cdot 10^{27} кг}{2 \cdot 10^{30} кг} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow M_ю <$ 0,15% от $M_\odot \Rightarrow$

$\Rightarrow 14{,}5 M_ю < 20 M_ю <$ 3% $M_\odot = \frac{3}{1{,}4}$% $M_{пульс} <$

$<$ 2,5% $M_{пульс} \Rightarrow M_{сп.} \ll M_{пульс}$

Тогда по III з. Кеплера найдём большую полуось орбиты спутника: $\frac{T^2 (M_П)}{T_0^2 \cdot M_\odot} = \frac{a^3}{a_0^3} \Rightarrow$ $T_0 = 1$ год, $a_0 = 1$ а.е.

$\Rightarrow a^3 = a_0^3 \cdot \left(1{,}4 \cdot \left(\frac{0{,}03}{365{,}24}\right)^2\right) \approx a_0^3 \cdot \frac{12{,}6 \cdot 10^{-4}}{365^2} \approx$

$\approx \frac{12{,}6 \cdot 10^{-4}}{129600} \cdot a_0^3 = \frac{12{,}6 \cdot 10^{-4}}{12{,}96 \cdot 10^4} \cdot a_0^3 = 0{,}9 \cdot 10^{-8} a_0^3$

Запишем неравенство разницы приливных сил и гравитационных сил спутника: $GM\left(\frac{1}{(a-r)^2} - \frac{1}{(a+r)^2}\right) \le$

$\le \frac{Gm}{r^2} \Rightarrow M \cdot \frac{4ra}{(a^2-r^2)^2} \le \frac{m}{r^2} \Rightarrow \frac{4r^3 a}{(a^2-r^2)^2} \le \frac{m}{M}$

Задача № 2

$a^3 \approx 0{,}9 \cdot 10^{-8} a_0^3 \Rightarrow a > 0{,}9 \cdot 10^{-2} a_0 = 9 \cdot 10^{-3} a_0 = 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot$
$\cdot 10^{-3}$ км $= 13{,}5 \cdot 10^5$ км $= 1{,}35 \cdot 10^6$ км

Размеры спутника, наверное, всё же ограничены ка-кой-нибудь величиной в ~~10~~ 10^5 км ($\cancel{2}\, d_{ю}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ будем считать, что $r \ll a \Rightarrow \frac{4r^3}{a^3} \le \frac{m}{M}$

$\cancel{\rho = \frac{3m}{4\pi r^3}}$ т.к. $\rho = \frac{3m}{4\pi r^3}$; $\frac{4r^3}{a^3} \le \frac{m}{M} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m}{r^3} \geqslant \frac{4M}{a^3} \Rightarrow \rho = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{m}{r^3} \geqslant \frac{4M}{a^3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 1{,}4 M_\odot}{0{,}9 \cdot 10^{-8} a_0^3} = \frac{5{,}6 \cdot 2 \cdot 10^{30}\text{ кг}}{0{,}9 \cdot 10^{-8} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ м})^3} =$$

$$= \frac{11{,}2 \cdot 10^{30}\text{ кг}}{0{,}9 \cdot 3{,}375 \cdot 10^{25}\text{ м}^3} = \frac{11{,}2 \cdot 10^{30}\text{ кг}}{3{,}0375 \cdot 10^{25}\text{ м}^3} \approx$$

$$\approx 3{,}7 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

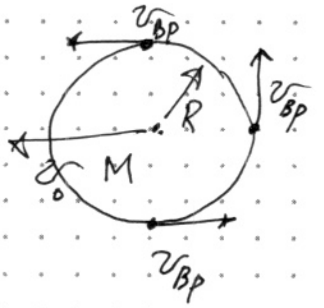
~~Плотность~~ ~~Величина 3,7 · 10^5 по порядку~~

Величина $3{,}7 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \gg \rho_{\text{Земли}}$, состоящей из же-леза, и по порядку соответствует ~~тяжелым~~ тяжё-лым металлам из таблицы Менделеева, таким как ртуть или свинец $\Rightarrow$ видимо, ~~планета~~ спутник состоит в ос-новном из тяжёлых металлов с плотностью $> 3{,}7 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

~~Ответ~~

это ответ

Задача № 4



$$v_{вр} \le \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (\text{I косм.})$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{v_1 - v_2}{c}$$

Смещение на 3,4 Å вызвано движением звезды относительно Солнца $\Rightarrow$ $\frac{\Delta\lambda_{на\ краю} - \Delta\lambda_{в\ центре}}{\lambda_0} =$

$$= \frac{(v_{вр.} + v_0) - (v_0)}{c} = \frac{v_{вр.}}{c} \Rightarrow \frac{0{,}1Å}{5170{,}7Å} = \frac{v_{вр.}}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{вр.} = c \cdot \frac{1}{51707} = \frac{300000}{51707}\frac{км}{с} \approx 5{,}8\ \frac{км}{с}$$

$$\frac{v_{вр}^2}{G} \le \frac{M}{R}, \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \text{ известна} \Rightarrow 4\pi R^3 = \frac{3M}{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$\frac{v_{вр}^2}{G} \le M \cdot \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{-1/3} = M^{2/3} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{-\frac{1}{3}} = M^{2/3} \cdot \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{1/3}$$

$$\frac{v_{вр}^2}{G} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \le M^{2/3} \Rightarrow \left(\frac{v_{вр}^2}{G}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3 \cdot 3/2} \le M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{min} = \frac{v_{вр.}^3}{G^{3/2}} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

Для звёзд главной последовательности $\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\alpha}$, где α колеблется от 3 до 4 $\Rightarrow$ возьмём $\alpha = 3$ для

Задача № 4 нижней оценки.

$$L_{min} = L_{\odot} \cdot \left(\frac{M_{min}}{M_{\odot}}\right)^3$$

$$\frac{3}{4\pi\rho} = \frac{3}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 700 \frac{кг}{м^3}} = \frac{3}{12{,}56 \cdot 700} \frac{м^3}{кг} \approx \frac{3}{12{,}6 \cdot 700} \frac{м^3}{кг} =$$

$$= \frac{3}{7000 + 1400 + 420} \frac{м^3}{кг} = \frac{3}{8820} \frac{м^3}{кг} = \frac{1}{2740} \frac{м^3}{кг} \approx$$

$$\approx \left(\frac{1}{52}\right)^2 \frac{м^3}{кг}$$

$$\frac{v_{вр.}^3}{G^{3/2}} = \frac{\left(5{,}8 \cdot 10^3 \frac{м}{с}\right)^3}{\left(6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}\right)^{3/2}} = \frac{195{,}112 \cdot 10^9}{\left(300{,}763 \cdot 10^{-33}\right)^{1/2}} \frac{кг^{3/2}}{м^{3/2}} \approx$$

$$\approx \frac{195 \cdot 10^9}{\left(301 \cdot 10^{-33}\right)^{1/2}} \left(\frac{кг}{м}\right)^{3/2} \approx \frac{195 \cdot 10^9}{5{,}5 \cdot 10^{-16}} \left(\frac{кг}{м}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{195 \cdot 10^{25}}{5{,}5} \left(\frac{кг}{м}\right)^{3/2}$$

$$M_{min} = \frac{195 \cdot 10^{25}}{5{,}5} \cdot \frac{1}{52} кг = \frac{195}{286} \cdot 10^{25} кг = 0{,}68 \cdot 10^{25} кг$$

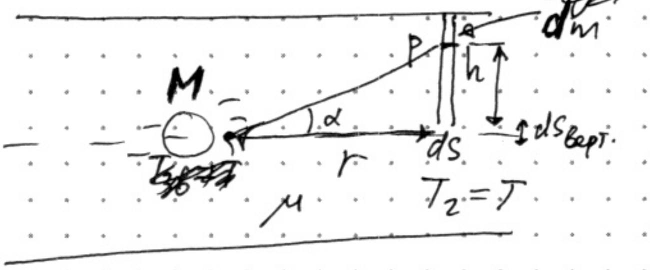
$$L_{min} = 3{,}83 \cdot 10^{26} Вт \cdot \left(\frac{0{,}68 \cdot 10^{25} кг}{2 \cdot 10^{30} кг}\right)^3 \approx 3{,}8 \cdot 10^{26} Вт \cdot \left(0{,}34 \cdot 10^{-5}\right)^3$$

$$= 3{,}8 \cdot 10^{26} Вт \cdot \left(3{,}4 \cdot 10^{-6}\right)^3 \approx 3{,}8 \cdot 10^{26} Вт \cdot 39{,}304 \cdot 10^{-18} \approx$$

$$\approx 149{,}34 \cdot 10^8 Вт = 1{,}49 \cdot 10^{10} Вт$$

$$\boxed{Ответ: L_{min} = 1{,}49 \cdot 10^{10} Вт}$$

Задача № 5



Рассмотрим узкий вертикальный столб и dm газа на высоте h в нём

$$\frac{GM}{r^2+h^2}\cdot\sin\alpha\cdot dm = -dp\cdot dS$$

$dm=\rho\cdot dS\cdot dh$, $h\ll r \Rightarrow r^2+h^2\approx r^2$, $\sin\alpha\approx\frac{h}{r}$

$$\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{h}{r}\cdot\rho\cdot dS\cdot dh = -dp\cdot dS$$

$$p\cdot dS\cdot dh = \frac{dm}{\mu}RT_2 \Rightarrow p = \frac{\rho RT_2}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT_2}$$

$$\frac{GMh}{r^3}\cdot\frac{p\mu}{RT}\cdot dh = -dp \Rightarrow -\frac{dp}{p} = \frac{GMh\mu}{r^3RT_2}\cdot dh$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{-\mu GMh\,dh}{r^3RT} \Rightarrow \cancel{\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu GMh^2}{2r^3RT}}$$

$$\Rightarrow \ln p = -\frac{\mu GMh^2}{2r^3RT} + \cancel{const}\ \ln p(h=0)$$

$$\ln p(h=0) = \ln(p_0) \Rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\mu GMh^2}{2r^3RT}}$$

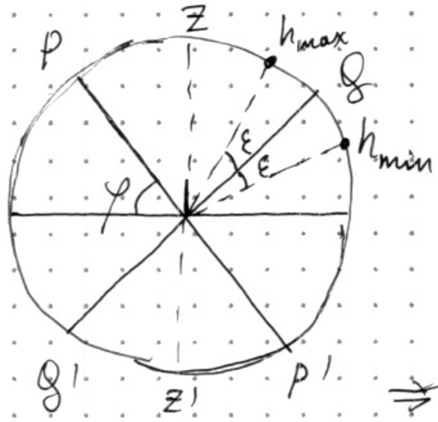
$$\cancel{\frac{GM\rho_0\,dr\cdot dS_{верт.}}{r^2} = dS_{верт.}\cdot(p_0(r+dr)-p_0(r))}$$

$\cancel{GM\rho}$ $\cancel{\rho_0=\rho \text{ при } h=0}$ $\qquad \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{p}{p_0}$

$\cancel{\frac{GM\rho_0}{r^2}=p_0'(r)}$ Отсюда $\rho=\rho_0\cdot e^{-\frac{\mu GMh^2}{2r^3RT}}$

Ответ: $\rho=\rho_0\cdot e^{-\frac{\mu GMh^2}{2r^3RT}}$, где ρ_0 – плотность при $h=0$

Задача № 1



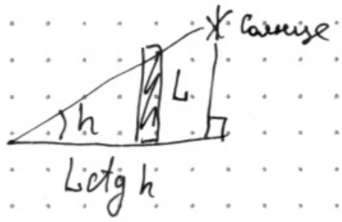
Высота Солнца в полдень колеблется от $90°-\varphi-\varepsilon$ до $90°-\varphi+\varepsilon$ при $\varphi \in [\varepsilon;\ 90°]$.

Длина тени $= L \cdot ctg\, h_{\odot}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\dfrac{ctg\, h_{max}}{ctg\, h_{min}} = \dfrac{1}{2}}$ $\qquad h_{max} = 90° - \varphi + \varepsilon$

$h_{min} = 90° - \varphi - \varepsilon$

$\cancel{ctg(90° - \varphi + \varepsilon) = ctg(90°}$



$\Rightarrow$ $L \cdot ctg\, h_{min} - L\, ctg\, h_{max} = 2L$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{\dfrac{\sin h_{max} - \sin h_{min}}{\cos} = \sin h_{min}}$

$$\Rightarrow \frac{\cos h_{min} \sin h_{max} - \cos h_{max} \sin h_{min}}{\sin h_{max} \sin h_{min}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(h_{max} - h_{min})}{\sin h_{max} \cdot \sin h_{min}} = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin(90° - \varphi + \varepsilon) \cdot \sin(90° - \varphi - \varepsilon)} =$$

$$= \frac{\sin 2\varepsilon}{\cos(\varphi - \varepsilon) \cdot \cos(\varphi + \varepsilon)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 2\varepsilon}{\frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 2\varepsilon)} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin 2\varepsilon = \cos 2\varphi + \cos 2\varepsilon \Rightarrow \cos 2\varphi = \sin 2\varepsilon - \cos 2\varepsilon =$

$= \sqrt{2}(\sin 2\varepsilon \sin 45° - \cos 2\varepsilon \cos 45°) = -\sqrt{2}\cos(2\varepsilon + 45°)$

$\Rightarrow$ т.к. $2\varepsilon \approx 47°$, то $\cos 2\varphi = -\sqrt{2}\cos(92°) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\cos 92° = -\sin 2° \approx -\frac{2}{180°} \cdot \pi$, то $\cos 2\varphi \approx \frac{2\sqrt{2} \cdot \pi}{180}$

Задача № 1 ~~Отсюда~~ $\frac{2\sqrt{2}\cdot\pi}{180} \approx \frac{2\cdot 1{,}41\cdot 3{,}14}{180} \approx 0{,}05 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\varphi = \sin(90^\circ - 2\varphi) \underset{\text{малый угол}}{\approx} 0{,}05 \Rightarrow \sin(90^\circ - 2\varphi) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{2\varphi}{180}\cdot\pi =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\varphi}{90} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{45}\right)$, φ в градусах $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{45}\right) = \frac{2\sqrt{2}\cdot\pi}{180} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{180} = 1 - \frac{\varphi}{45^\circ} \Rightarrow \varphi =$

$= 45^\circ\cdot\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{180}\right) \approx 45^\circ\cdot\left(1 - \frac{1{,}41\cdot 4}{180}\right) =$

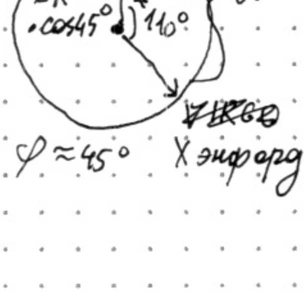
$= 45^\circ\cdot\left(1 - \frac{1{,}41}{45}\right) = 45^\circ - 1{,}41^\circ \approx 43{,}6^\circ$

$\boxed{\text{Ответ: } \varphi = 43{,}6^\circ}$

Задача № ~~5~~ 3

$3\cdot10^{-3}\,с\cdot 3\cdot10^{5}\,\frac{км}{с} = 9\cdot10^{2}\,км = 900\,км \Rightarrow$

$\Rightarrow$ длины путей гравит. сигнала до телескопов отличались не более, чем на 900 км



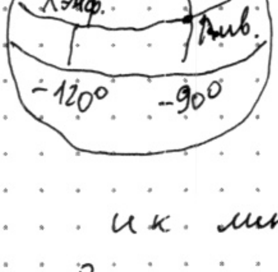
$$d \approx \sqrt{\frac{1}{2}R_3^2+\frac{1}{2}R_3^2 - \cos110^\circ\cdot 2\cdot R_3^2} \approx$$

$$\approx R_3\cdot\sqrt{1 - 2\cos110^\circ} <$$

$$< R_3\cdot\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,R_3 \approx$$

$6400\cdot1,4\,км = (6400+2560)\,км \approx 9000\,км \gg$

$\gg 900\,км \Rightarrow$ сигнал пришёл под большим углом к линии Хэнфорд – VIRGO

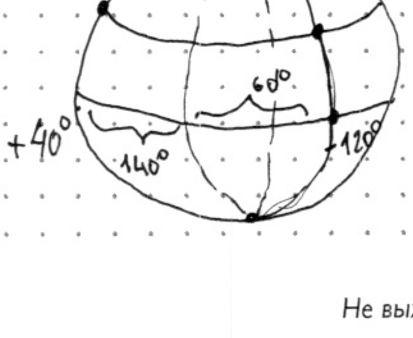


$$d_{Л-Х} > \sin30^\circ\cdot R_3\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}R_3 =$$

$= 0,35\cdot 6400\,км = 1800+120+$

$+320 = 2240\,км$, что тоже много $\Rightarrow$ сигнал пришёл под большим углом и к линии Лив. – Хэнфорд.

В целом можно понять, что направление на источник сигнала не очень сильно отличается от направления перпендикуляра к плоскости Хэнфорд – Ливингстон – VIRGO



Через полчаса источник взошёл на горизонте для РАН. За полчаса Земля успела повернуться на 7,5° вокруг своей оси