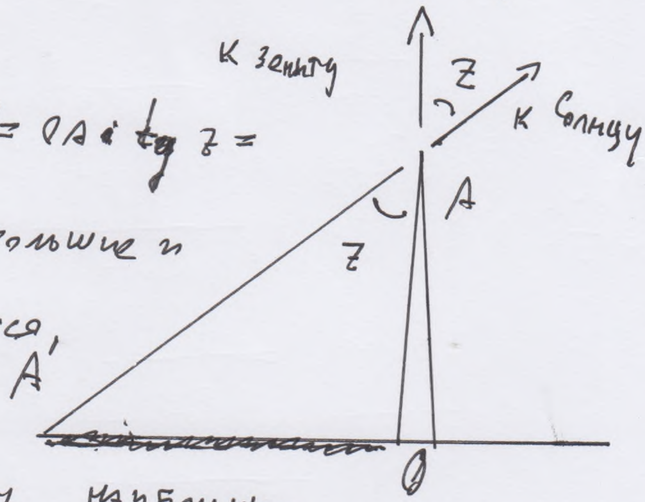
Задача 1.

Поскольку в полдень Солнце кульминирует – более того, что в верхней кульминации – его зенитное расстояние определим как $z = |\varphi - \delta|$, где – δ – склонение Солнца, φ – искомая широта. По рисунку видно, что длина тени равна $OA' = OA \cdot tg\, z = \frac{h \cdot \sin z}{\cos z}$. Очевидно, что наибольшие и наименьшие длины тени достигаются в дни солнцестояний, когда $z = |\varphi + \varepsilon|$ или $z = |\varphi - \varepsilon|$. Разность наибольшего и наименьшего равна $2h$: $h \cdot tg|\varphi+\varepsilon| - h \cdot tg|\varphi - \varepsilon| = 2h$ или $tg|\varphi+\varepsilon| - tg|\varphi-\varepsilon| = 2$



В тропическом поясе не бывает достаточно длинных теней. Предположим, гномон севернее $+\varepsilon$ сев. ш. Тогда $|\varphi+\varepsilon| = \varphi + \varepsilon$, $|\varphi - \varepsilon| = \varphi - \varepsilon$. Тогда $tg(\varphi+\varepsilon) - tg(\varphi-\varepsilon) = 2$ или

$$\frac{tg\varphi + tg\varepsilon}{1 - tg\varphi \cdot tg\varepsilon} - \frac{tg\varphi - tg\varepsilon}{1 + tg\varphi \cdot tg\varepsilon} = 2,$$ откуда $$tg^2\varphi = \frac{1 - tg\,\varepsilon}{tg\,\varepsilon + tg^2\varepsilon}$$

и $tg\varphi \approx 0{,}96$ значит $\varphi \approx 44^\circ$. Понятно, что в южном полушарии также то же возможно, значит $\varphi = \pm 44^\circ$.

В тропиках $z = |\varphi - \delta| \leq |\varphi| + |\delta| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \simeq 47^\circ$.

Тогда $OA' = h \cdot tg\, z \leq h \cdot tg\, 47^\circ < 2h$, а значит и разность не может быть равна $2h$.

Ответ: $\varphi = \pm 44^\circ$

Задача 2.

По третьему закону Кеплера $\frac{a^3}{M \cdot T^2} = 1$, где a – радиус орбиты спутника, T – период обращения, M – масса системы „спутник-пульсар", причем a берётся в астрономических единицах, T – в годах, M – в массах Солнца.

$T = 0{,}03$ суток $\simeq 8{,}2 \cdot 10^{-5}$ лет. $M_{спутника} = 14{,}5 \cdot M_{юпитера} \simeq 0{,}014 M_\odot$

значит с хорошей точностью $M \simeq M_{пульсара} = 1{,}4 M_\odot$, где $M_\odot$ – масса Солнца. Значит $a = \sqrt[3]{M \cdot T^2} = \sqrt[3]{1{,}4 \cdot (8{,}2 \cdot 10^{-5})^2} = \sqrt[3]{1{,}4 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-9}} \simeq$ $\simeq 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ а. е. Спутник, находящийся столь близко к центральному светилу, очевидно, не может быть твёрдым. По-видимому, он состоит из горячего газа.

Задача 4.

Сдвиг линий вызван как удалением звезды от нас, так и её вращением. Линия на краю сдвинута относительно линии в центре диска на $0{,}1$ Å. – Это исключительно за счёт вращения звезды. Скорость точек на её экваторе равна $V_{экв.} =$ $= \frac{0{,}1 \text{Å}}{5170{,}7 \text{Å}} \cdot 300000 \frac{км}{с} \simeq 5{,}8 \frac{км}{с}$. Но чтобы звезда не разорвалась на части, должно быть $V_{экв.} \le V_{I\ косм.} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} =$ $= \sqrt{\frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \rho \cdot R^3}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \cdot G \cdot \rho \cdot R^2}$. Здесь M – масса, R – радиус, ρ – плотность звезды, G – гравитационная постоянная.

Значит $R^2 \geq \frac{3\cdot V_{экв}^2}{4\pi\cdot G\cdot\rho} = 1{,}6\cdot10^{14}\ м^2 = 3\cdot10^{-4}\cdot R_\odot^2$

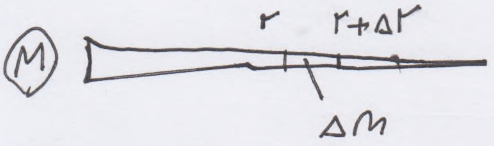
Поскольку в спектре есть линии TiO, то температура звезды порядка $4500\,°K = \frac{3}{4}\cdot T_\odot$ и тогда $T^4 = \left(\frac{3}{4}T_\odot\right)^4 \approx 2{,}5\cdot10^{-1}\cdot T^4$

Значит $L = 4\pi\cdot R^2\cdot\sigma\cdot T^4 = \sigma\cdot4\pi\cdot3\cdot10^{-4}\cdot R_\odot^2\cdot2{,}5\cdot10^{-1}\cdot T_\odot^4 = 3\cdot10^{-4}\cdot0{,}25\cdot L_\odot \approx 0{,}7\cdot10^{-4}\cdot L_\odot$. Здесь σ – постоянная Стефана-Больцмана, L - светимость.

Ответ: $L \geq 7\cdot10^{-5}\cdot L_\odot$

Задача 5.

Найдём сначала давление в плоскости симметрии диска. Пусть на расстоянии r давление p, а на расстоянии $r+\Delta r$ – $p+\Delta p$. и пусть Δm – масса некоторой области.



Условие равновесия сил:

$$p\cdot S - (p+\Delta p)S - \frac{GM\cdot\Delta m}{r^2} = 0$$

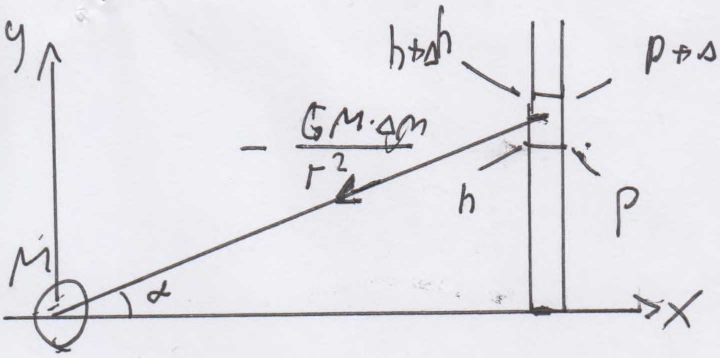
$\Delta m = \rho\cdot S\cdot\Delta h$. Отсюда $\rho\cdot\frac{GM}{r^2} = -\frac{\Delta p}{\Delta r}$. Но $p = \frac{\rho}{\mu}\cdot RT$.

Значит $\Delta p = \frac{RT}{\mu}\cdot\Delta\rho$ и $\rho\cdot\frac{GM}{r^2} = -\frac{RT}{\mu}\cdot\frac{\Delta\rho}{\Delta r}$. Из этого дифференциального уравнения $\rho = \rho_1\cdot\exp\left(\frac{GM\cdot\mu}{r\cdot RT}\right)$.

Здесь ρ_1 – плотность на расстоянии 1.

Рассмотрим теперь столбик вещества диска на расстоянии r от звезды:

Кр-7



Здесь S - площадь основания столбика.

Запишем условие равновесия сил в проекции на Oy:

$$p\cdot S-(p+\Delta p)S-\frac{G\cdot M\cdot\Delta m}{r^2}\cdot\sin\alpha=0.$$

Подставляя $\Delta m=\rho\cdot S\cdot\Delta h$ и $\sin\alpha=\frac{h}{R}$ (по условию $h<<R$)

получим $\rho\cdot\frac{G\cdot M\cdot h}{r^3}=-\frac{\Delta p}{\Delta h}$. Из уравнения

Менделеева - Клапейрона $p=\frac{\rho}{\mu}\cdot RT$ и $\Delta p=\frac{RT}{\mu}\cdot\Delta\rho$, т.к. $T=const$.

Значит $\frac{\Delta\rho}{\Delta h}=-\frac{GM\cdot h}{r^3}\cdot\frac{\mu}{R\cdot T}\cdot\rho$. Отсюда $\rho=\exp\left(-\frac{GM\cdot\mu}{2r^3\cdot R\cdot T}\right)\cdot\rho_A$.

Подставляя $\rho_A=\rho_1\cdot\exp\left(\frac{GM\cdot\mu}{r\cdot RT}\right)$, получим окончательно:

$$\rho=\rho_1\cdot\exp\left(\frac{GM\cdot\mu}{RT}\left(\frac{1}{r}-\frac{h^2}{2r^3}\right)\right)$$