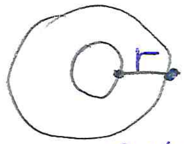
№2. Дом-42

Давайте посчитаем, какое среднее ускорение свободного падения создает Солнце ще между орбитами Земли и Марса.

среднее расстояние 1,25 а.е.

$$\langle g_\odot \rangle = \frac{GM_\odot}{(1{,}25 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11})^2} \approx \frac{1{,}3 \cdot 10^{20}}{3{,}5 \cdot 10^{22}} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \ \frac{м}{с^2}$$

Это много ~~больше~~ меньше, чем $g_\oplus$, с которым летит корабль. значит, когда двигатели включены, грав. влияние Солнышка можно не учитывать. значит, корабль должен лететь некоторое время t_1 с ускорением $g_\oplus$, а потом выключить двигатель и двигаться по инерции, но уже с ускорением $-\langle g_\odot \rangle$.

Пусть он с включенным двигателем пролетел l_1, а потом его выключил и долетел l_2 до марса. (сначала получим ~~оценку~~ минимальную оценку времени - когда корабль летит по кратчайшему пути  этот путь r на рисунке равен 0.5 а.е.)

Сначала его двиг. совершил удельную работу $g_\oplus l_1$, придав ему удельную кинетическую энергию K_0. Затем работу совершало поле тяжести Солнца, причем оно совершило ее так, что к концу полета $K = 0$. то есть:

$$g_\oplus \cdot l_1 = K_0 \ ; \ -\langle g_\odot \rangle l_2 = -K_0$$

итого,

$$\frac{g_\oplus}{\langle g_\odot \rangle} = \frac{l_2}{l_1} = 3000$$

также $l_2 + l_1 = 0{,}5$ а.е.

получаем:

$$3000\, l_1 + l_1 = 0{,}5 \text{ а.е.}$$

$$l_1 = \frac{1}{6002} \text{ а.е.}$$

Учитывая, что эту дистанцию он летел с ускорением $g_\oplus$.

$$\frac{g_\oplus t_1^2}{2} = \frac{1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{6002}$$

$$t_1^2 = \frac{1{,}5 \cdot 10^{10}}{3001} \Rightarrow t_1 \approx \sqrt{5} \cdot 10^3 с \approx 2{,}2 \cdot 10^3 с$$

№2 (прод.) Дол-42

Вторую половину он летел так, что $V_0 = gt_1 = 1{,}2 \cdot 10^{4} \frac{м}{с}$,

$a = -\langle g_0 \rangle$ (далее просто g_0)

итого:

$l_2 = V_0 t_2 - \frac{g_0 t_2^2}{2}$

$l_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6002} = \frac{3001-1}{6002} = \frac{3000}{6002}$ а.е. $= \frac{4{,}5 \cdot 10^{14}}{6002}$ м.

$-\frac{4{,}5 \cdot 10^{14}}{6002} + 1{,}2 \cdot 10^{3} t_2 - \frac{10^{-2}}{6} t_2^2 = 0.$

решим крайне приблизительно:

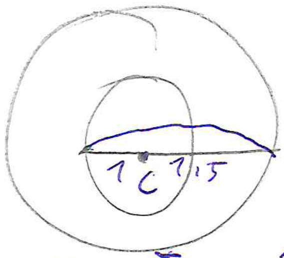
$-4{,}5 \cdot 10^{11} + 12 \cdot 10^{4} t_2 - 10^{-2} t_2^2 = 0.$

Дискриминант почти 0, поэтому:

$t_2 \approx \frac{1{,}2 \cdot 10^{4}}{2 \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}6 \cdot 10^{6}$ с

итого, $t_1 + t_2 \approx t_2 \approx 0{,}6 \cdot 10^{6}$ с $\approx 2 \cdot 10^{-2}$ лет

Максимальная длительность полета будет очевидно по вырожденному Гомановскому эллипсу с выкл. двигателями.



$a = \frac{1 + 1{,}5}{2} = 1{,}25 = \frac{5}{4}$ а.е.

$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{\frac{125}{16}} \approx \frac{11}{4}.$

$\tau = \frac{T}{2} = \frac{11}{8} = 1{,}375$ года.

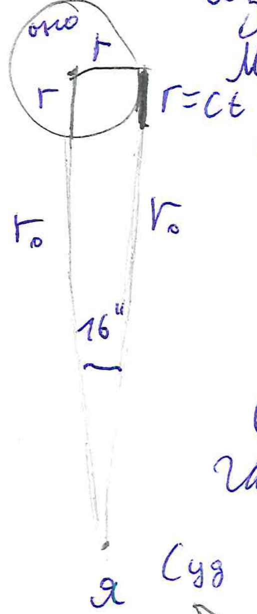
ответ: от 0,02 года до 1,375 года

№ 5.

Объект Суд X-3 является кандидатом на роль ЧД. Из этого можно предположить, что он имеет большой радиус, и задержка в 2,7 года вызвана тем, что свет от его дальнего края летит дальше на 2,7 года чем от ближнего:

Из этого, очевидно, $r = 2{,}7$ св. лет.

Много конечно, но ничего.

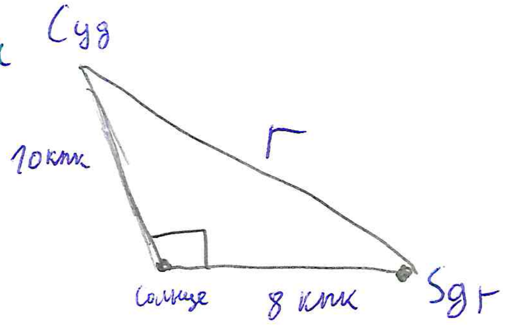


отсюда, учитывая, что 16" малый угол:

$$r_0 = \frac{r}{16''} = \frac{2{,}7 \cdot 2 \cdot 10^5}{16} = \frac{27 \cdot 10^4}{8} \text{ св. лет.}$$

что примерно 10 кпк.

Объект находится в лебеде, а это плоскость галактики.



Цан центр галактики в стрельце. Вспомнив карту зв. неба можно оценить, что на земном небе угол между лебедем и стрельцом примерно 90°.

Значит, $r = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} \approx 13$ кпк.

Ответ: 13 кпк до центра галактики, 10 до Солнца.

№3. Дол-42

Оценим расстояние до звезды:

$$r = \frac{1}{\pi} = 250 \text{ пк.}$$

Ветер, двигаясь с $V = 300 \frac{км}{с}$, пройдет столько за:

$$t = \frac{250 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{8}}{300} = 2{,}5 \cdot 10^{13} \text{ с}$$

Учитывая, что в году примерно $3{,}15 \cdot 10^7$ с, получим.

$$t = \frac{250}{315} \cdot 10^6 \approx 7 \cdot 10^5 \text{ лет.}$$

За это время звезда излучит 0,7 $M_\odot$ этого самого ветра.

~~Вспомним, что~~ $\cancel{\frac{M}{M_{mol}}}$ Солнечный ветер состоит в основном из протонов. Молярная масса протона примерно $1 \frac{г}{моль}$.
Значит, в 1 моле водорода содержится 1 г протонов.
Если 1 протон один:

$$\frac{1}{N_a} = \frac{m_p}{m_{mol}}$$

тогда:

$$m_p = \frac{1}{N_a} г = \frac{1}{6} \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

а тогда, в 0,7 $M_\odot$ протонов:

$$\frac{7 \cdot 2 \cdot 10^{29}}{\frac{1}{6} \cdot 10^{-27}} = 84 \cdot 10^{56} \text{ пр.}$$

Учитывая, что они заполняют шар радиусом 250 пк, концентрация будет:

$$\frac{84 \cdot 10^{56}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (250 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11})^3} = 21 \cdot \frac{10^{56}}{750^3 \cdot 10^{48}} = 21 \cdot \frac{10^5}{75^3} = \frac{21 \cdot 10^5}{4{,}2 \cdot 10^5} = \frac{21}{4{,}2} = 5$$

$$75^3 \approx 4{,}2 \cdot 10^5$$

Ответ: $5 \frac{1}{м^3}$

№1 Дол-42

Оценим сначала концентрацию в этом облаке: известно, что в столбике объемом 4 пк · 1 см^2 содержится $2{,}8 \cdot 10^{14}$ молекул. Молярная масса сахара считается просто:

$M_{mol} = M_C + 2M_H + M_O + M_H + M_C + M_H + M_O$, где $M_H = 1\frac{г}{моль}$ (мол. масса водорода) $M_O = 8\frac{г}{моль}$, $M_C = 6\frac{г}{моль}$ итого, $M_{mol} = 32\frac{г}{моль}$.

Очевидное тождество:

$\frac{M}{M_{mol}} = \frac{N}{N_a}$. Если каждую часть разделить на V:

$\frac{\rho}{M_{mol}} = \frac{n}{N_a}$, где n – концентрация.

А $M_{общ} = \rho \cdot V = \frac{n \cdot M_{mol} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{N_a}$

Учитывая, что $n = \frac{2{,}8 \cdot 10^{14}}{2r}$, где r в см. (будем работать в СГС).

Получаем:

$M_{общ} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{14} \cdot 32 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^2}{N_a}$. $\pi \approx 3$, $N_a = 6 \cdot 10^{24}$

$r = 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{13}$ см $= 6 \cdot 10^{18}$ см

$M_{общ} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{13} \cdot 2^5 \cdot 2^2 \cdot \cancel{36} \cdot 10^{28}}{\cancel{6} \cdot 10^{24}} = 2^8 \cdot 42 \cdot 10^7 = 10752 \cdot 10^7 \approx$

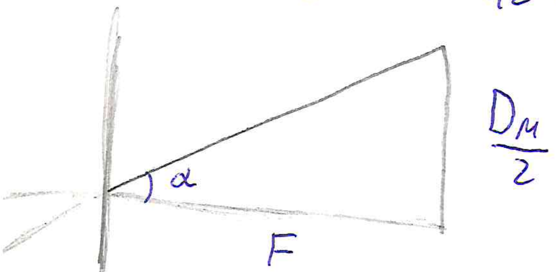
$\approx 1 \cdot 10^{11}$ г

Ответ: $1 \cdot 10^{11}$ г

№ 4 Дол-42.

Сначала давайте найдем предельное угловое разрешение телескопа на длине волны 600 нм. Оно составит:

$$\theta = 1{,}22\cdot\frac{\lambda}{D} = \frac{1{,}22\cdot 6\cdot 10^{-7}}{42\cdot 10^{-3}} = \frac{122}{7}\cdot 10^{-6} = 17\frac{3}{7}\cdot 10^{-6} \approx 17{,}5\cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$



Если принять что $26°\times 26°$ означает, что полем зрения является круг диаметром $26°$, то α на рисунке есть $\frac{26}{2} = 13°$, т.к. это половина поля зрения. Отсюда можно выразить F:

$$\frac{D_м}{2} = tg\,\frac{\alpha}{\cancel{2}}\cdot F$$

$13°$ это малый угол. поэтому:

$$\frac{D_м}{2\alpha} = F \quad , \text{где } \alpha = \frac{13}{57} \text{ рад.}$$

Размер изображения на матрице при предельном разрешении составит:

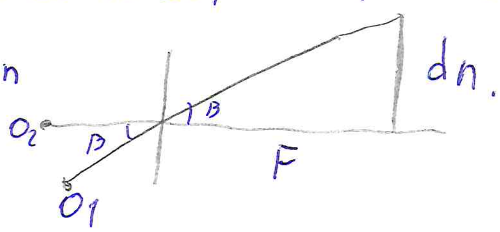
$$\theta\cdot F = 17{,}5\cdot 10^{-6}\cdot\frac{37\cdot 57}{2\cdot 13} \text{ (мм).}$$

а размер одного пикселя $d_п$:

$d_п = \frac{37}{4096}$, что явно больше чем верхнее ~~изобр.~~ значение.

Значит, предельное разрешение будет зависеть не от телескопа, а от матрицы. Я могу различить два объекта когда между ними расстояние в 1 пиксель. Т.е., если β - предельное разрешение,

то $F\cdot\beta = \frac{37}{4096} = d_п$.



Итого:

$$\beta = \frac{d_п}{F} = \frac{\cancel{37}\cdot 2\cdot 13}{2^{14}\cdot\cancel{37}\cdot 57} = \frac{13}{2^{13}\cdot 57} \text{ (рад).}$$

переведем в секунды: $\beta\cdot 2\cdot 10^5 = \beta'' = \frac{13\cdot 10^5}{2^{12}\cdot 57}$. Учитывая, что $2^{11}\approx 2\cdot 10^3$, получим:

$$\boxed{\beta'' \approx 11{,}5''}$$