XXVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур

2020

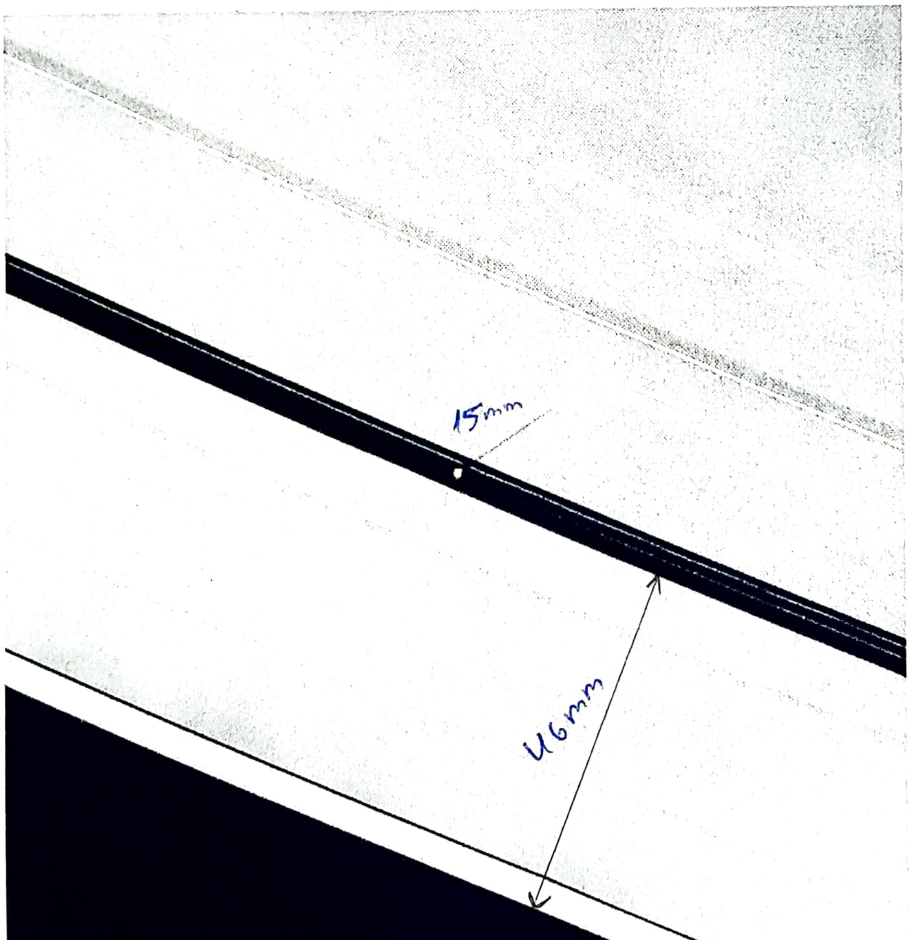
1 марта

---

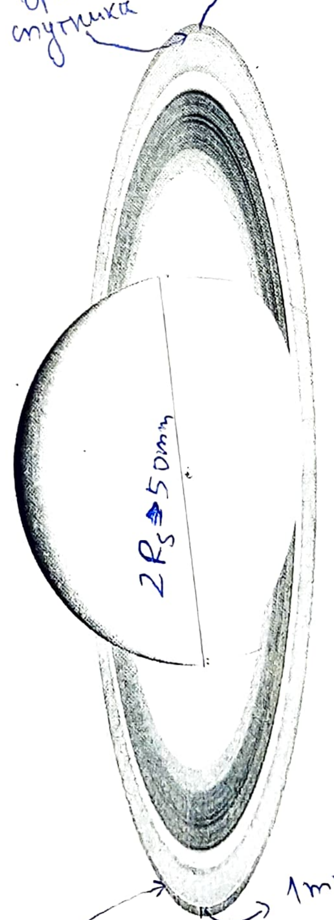
9 класс

На двух фотографиях ниже представлены спутник Сатурна, движущийся во внешней области колец, и сам Сатурн (негатив). Известно, что в момент съемки спутник находился в плоскости, перпендикулярной кольцам и проходящей через центры Солнца и Сатурна. Угол между плоскостью колец и направлением на Солнце при наблюдении со спутника составляет 1°. Радиус Сатурна в 9 раз больше радиуса Земли.

Оцените диаметр спутника, а также период его обращения вокруг Сатурна. Как часто этот спутник бывает в соединении с другим спутником Сатурна — Титаном? Титан делает один оборот вокруг Сатурна по орбите радиусом 1.2 миллиона километров за 16 дней. Опишите, что произойдет, если поместить Титан на орбиту этого спутника.



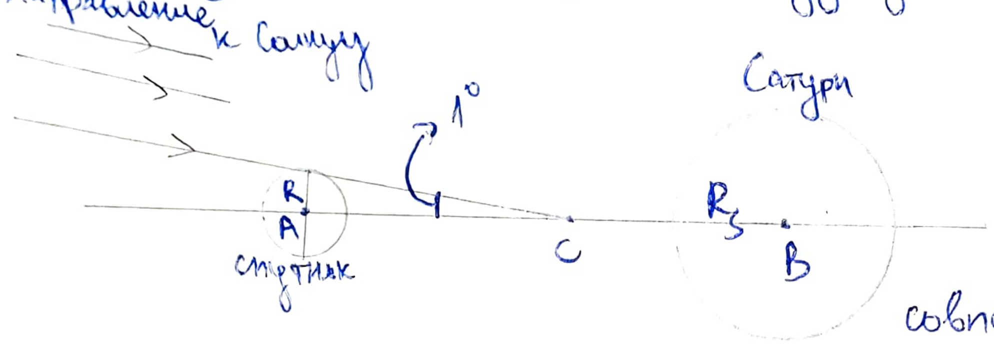
Снимок 1



Снимок 2

Практический тур.

Так как в условии сказано, что спутник, сатурн и Солнце лежат в одной плоскости, ~~пе~~перпендикулярной кольцам, можно сделать следующий чертёж:



плоскость бумаги совпадает с плоскости в условии, а плоскость колец совпадает с линией связывающей центры Сатурна и спутника (AB)

В условии сказано что угол м/у плоскотью колец и направлением к Солнцу 1°

отсюда можем ~~как~~ найти длину тени спутника, ~~проектиру~~ ~~ем~~ ~~на~~ проекция которой видна на кольцах

l, $R = l \cdot tg\, 1°$, но $tg\, \alpha_{[rad]} \approx \alpha$

R -> радиус спутника $\Rightarrow R = \frac{l \cdot \pi}{180}$

l -> длина тени

Для получения длины l нам нужно ~~найти~~ определить ~~п~~ какие кольца находятся рядом со спутником ~~ка~~ так как второй снимок в негативе мы должны искать тонкую белую ленту (орбита спутника) ~~о~~окруженной ~~двумя~~ одним ~~бол~~ (более) темным тонким слоем и одним более серым толстым слоем. Так как второй снимок сделан с кольцами в виде еллипса нам нужно смотреть на большую полосу этой эллипсы (она не узкается)

И да, можно увидеть необходимую полосу рядом с краем колец. Помогает и тот факт, что если на первом снимке мы видим два конца одной полосы ~~уже~~ можно увидеть, что более тонкий слой колец направлен наружу. (см. рисунок на условиях)

~~Вполне возможно, то что на втором снимке не видно спутник (он зао~~

~~Спутник~~ Измеряем диаметр Сатурна на снимке

$D_S \to 50mm$

$R_S \to 25mm \Rightarrow 9R_\oplus \to 25mm$

измеряем длину тёмной ~~полосы~~ тонкой ленты (лента наружнее орбиты спутника, которая видна и на первом снимке

$d \to 1mm \Rightarrow d = \dfrac{9R_\oplus \cdot 1}{25} = \dfrac{9R_\oplus}{25}$

на первом снимке длина полосы $\to 46mm \approx 45mm$

$\Rightarrow l \to 15mm \qquad l = \dfrac{1}{3} d = \dfrac{3R_\oplus}{25}$

$\Rightarrow R = \dfrac{3R_\oplus \cdot \pi}{25 \cdot 180} = \dfrac{3 \cdot 6400 \cdot \pi}{25 \cdot 180} = \dfrac{256 \cdot 3 \cdot \pi}{180} = \dfrac{64 \cdot \pi}{15} \approx 15km$

$R_\oplus \approx 6400km$

$\Rightarrow D = 2R = 30km$

найдем радиус его орбиты

$r \to 58mm \Rightarrow r = \dfrac{9R_\oplus \cdot 58}{25} \approx 64 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 58 km \approx 130000 km$

Из III закона Кеплера:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{\gamma M_S}{4\pi^2}$$, где T – период обращения спутника

T_T – период Титана

a_T – большая полуось Титана

M_S – масса Сатурна

$$\Rightarrow T = \left(\frac{r}{a_T}\right)^{3/2} \cdot T_T = \left(\frac{1{,}3\cdot 10^5}{1{,}2\cdot 10^6}\right)^{3/2} \cdot T_T = \frac{T_T}{10^{3/2}} \approx \frac{1}{2}\,d = 12^h$$

Отв: $D = 30$ км

$T = 12^h$

~~Если поместить Титан на орбиту в этого спутника не меняя при этом его скорость он~~

Если поместить Титан на орбиту этого спутника он ~~начнет~~ начнет разрушать кольца Сатурна. Можем узнать ~~то~~ на каком расстоянии от Титана ускорение от него будет сильнее чем от Сатурна.

$$g_T = \frac{\gamma M_T}{x^2} \qquad g_S = \frac{\gamma M_S}{r^2}$$, так как $x \ll r$, $r \pm x \approx r$

$$\Rightarrow x = r \cdot \sqrt{\frac{M_T}{M_S}}$$

Кроме того он неизбежно столкнётся с нашим спутником

~~Если же~~ Если же "перенести на орбиту" означает просто поменять расстояние Титан – Сатурн не меняя его скорость он будет двигаться ~~он~~ по орбите чей ~~перц~~ ~~по~~ апоцентр будет на расстоянии r, а перицентр можно будет найти:

$$\cancel{V_{ap}}\ V_a = \frac{2\pi a_T}{T_T} = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{a_T}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma M_S}{a'}}$$, a' – новая большая полуось

e – новый эксцентриситет

$$\Rightarrow \frac{1-e}{1+e} \cdot a_T = a'$$

что $r \to$ апоцентр. расст. $\Rightarrow a' = \frac{r}{1+e}$

$$\Rightarrow \frac{1-e}{1+e} \cdot a_T = \frac{r}{1+e}$$

$$1-e = \frac{r}{a_T} \Rightarrow e = 1 - \frac{r}{a_T} = \frac{9}{10}$$

$r = 1{,}5 \cdot 10^5 km$

$a_T = 1{,}2 \cdot 10^6 km$

$$\Rightarrow r_p = \frac{1-e}{1+e} \cdot r_a = \frac{1-e}{1+e} \cdot r = \frac{1}{19} \cdot r < R_S$$

т.е. Титан разобьется в Сатурн

Можем найти частоту соединений используя формулу для синодического периода

$$T' = \frac{T \cdot T_T}{T_T - T} = \frac{16 \cdot \frac{1}{2}}{16 - \frac{1}{2}} d = \frac{16}{31} d \approx 12^h$$

Отв: $T_{syn} \approx 12^h$

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

$$\frac{9 \cdot 6400 \cdot 58}{25} = \frac{64 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 58}{1{,}2 \cdot 10^6}$$

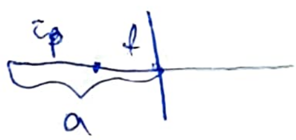
$$V = \frac{2\pi a}{T}$$

$$v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

$1-e$

$f = e \cdot a$

e ûo



$$\frac{\gamma M}{\cancel{x}^2} \qquad \frac{\gamma M_s}{r^2}$$

V

$$x = r \cdot \sqrt{\frac{M}{M_s}}$$

$$r_a = r = (1+e)a$$

$$a' = \frac{r}{1+e}$$

$$V_a = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a_T}}$$

$$V_a = \frac{2\pi a_T}{T_T} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a'}} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a_T}}$$

$$V_n = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \sqrt{\gamma M_s}$$

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \sqrt{a_T} = \sqrt{a'}$$

$$\frac{1-e}{1+e} \cdot a_T = a'$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1-e\frac{19}{10}}{1+e} \cdot r_T} = r_T = \frac{1}{19} \cdot r$$

$$\frac{r}{1+e} = a_T \cdot \frac{1-e}{1+e} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{9}{10} \qquad = \frac{r}{a_T}$$

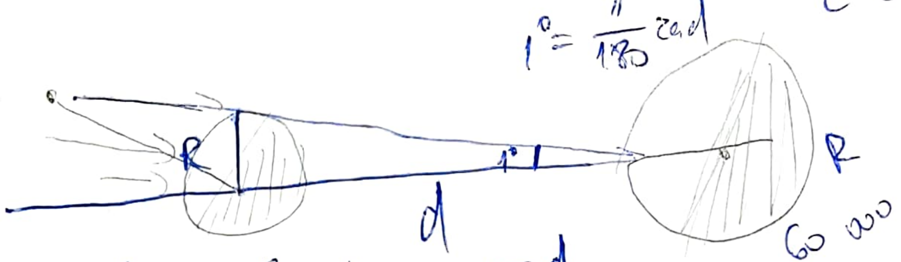
$$r = a_T(1-e) \quad \left(1 - \frac{r}{a_T}\right) = e$$

$$\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{G M_s}{4\pi^2}$$

15mm

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad

$\tau =$



$R = d \cdot tg\, 1^\circ = \cancel{d} \quad \frac{\pi d}{180}$

$\frac{13\cancel{0000}}{6\cancel{0000}} = 2$ 62

$D_S \to 50mm$

$R_S \Rightarrow 25mm \to$

$gR_\oplus \to 25mm$

2mm

$\frac{6400}{25} = 64.4.9.2$

$256.\cancel{18}9$

$\frac{6371.9.2}{25}$

$\frac{360}{\omega_\oplus - \omega} = \frac{360}{\frac{360}{T} - 86}$

$\frac{1}{2} \cdot 16 = \frac{1}{16-\frac{1}{2}} = \frac{16}{32-1} \approx \frac{16}{31} \approx$

$\frac{64}{15} = 1$

$l \to 15mm \to$

46mm

$\frac{1}{3} \cdot 256.9 = 256.3 \approx$

$180 = 10.18 = 5.36 = 5.3.12$

15.12

6400.9 256.4