Задача 1

$L_{x_1} = \frac{L}{tg\,h}$; L - ~~вы~~ длина гномона; h - полуденная высота Солнца;
L_{x_1} - длина тени гномона. Полуденная высота Солнца - высота солнца в верхней кульминации. Минимальная длина тени достигается при максимальной высоте и наоборот.

$h = 90° - |\varphi - \delta|$; φ - широта; δ - склонение Солнца.

Для определённости рассмотрим северное полушарие

Пусть $\varphi \geq \delta$, тогда $h = 90° - \varphi + \delta$

$L_x = \frac{L}{tg(90° - \varphi + \delta)}$

$L_{x\,max} = \frac{L}{tg(90° - \varphi + \delta_{min})}$; δ_{min} - минимальное склонение Солнца; $L_{x\,max}$ - максимальная длина тени.

$L_{x\,min} = \frac{L}{tg(90° - \varphi + \delta_{max})}$; δ_{max} - максимальное склонение Солнца; $L_{x\,min}$ - минимальная длина тени

$L_{x\,max} - L_{x\,min} = 2L$; $\frac{L}{tg(90° - \varphi + \delta_{min})} - \frac{L}{tg(90° - \varphi + \delta_{max})} = 2L$;

$tg(90° - \varphi + \delta_{max}) - tg(90° - \varphi + \delta_{min}) - 2\,tg(90° - \varphi + \delta_{min})\,tg(90° - \varphi + \delta_{max}) = 0$

~~В случае~~ ~~Если~~ В случае $\varphi < \delta$ такая ситуация невозможна.

Минимальная высота Солнца 43° ≈ 45° и длина тени равна длине гномона. Минимальная длина тени 0°, Солнце в зените.

Тогда $\Delta L = L < 2L$. Широта должна быть больше по модулю 23,5°.

Нужно решить уравнение. ~~Получаем~~ Ответом к задаче будет $\pm\varphi$, где φ - корень уравнения (в силу симметрии земных полушарий)

Корень уравнения примерно равен 25°...30°

Ответ: $\varphi = \pm 28°$

Задача 2

Дано:

$M = 1{,}4 M_{\odot}$

$T = 903$ сут

$M_x = 14{,}5 M_{ю}$

Решение:

$$\frac{T^2(M+M_x)}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}} = \frac{R^3}{R_{\oplus}^3};$$

$$R^3 = \frac{R_{\oplus}^3 T^2 (M+M_x)}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}}$$

R – радиус орбиты спутника

$R_{\oplus}$ – радиус орбиты Земли

M – масса пульсара

M_x – масса спутника

$$R = R_{\oplus}\sqrt[3]{\frac{T^2(1{,}4M_{\odot}+14{,}5M_{ю})}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}}} = R_{\oplus}\sqrt[3]{\frac{T^2(1{,}4M_{\odot}+0{,}0145M_{\odot})}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}}} = R_{\oplus}\sqrt[3]{\frac{T^2\cdot 1{,}41 M_{\odot}}{T_{\oplus}^2 M_{\odot}}} =$$

$$= R_{\oplus}\sqrt[3]{\frac{1{,}41 T^2}{T_{\oplus}^2}}; \quad R = 1\,\text{а.е.}\cdot\sqrt[3]{\frac{1{,}41\cdot(903\ \text{сут})^2}{(365\ \text{сут})^2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1{,}41\cdot 0{,}0009}{133325}}\right)\text{а.е} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{\frac{0{,}0013}{133325}}\right)\text{а.е.} = \left(\sqrt[3]{\frac{1{,}3\cdot10^{-3}}{1{,}33\cdot10^{5}}}\right)\text{а.е} = \left(\sqrt[3]{10^{-8}}\right)\text{а.е} = 0{,}0038\,\text{а.е.} = 3{,}8\cdot10^{-3}\,\text{а.е.} =$$

$$= 5{,}7\cdot10^{8}\ \text{м};$$

$$\cancel{a_n = \frac{4GMr}{R^3}}$$

$$g = \frac{GM_x}{r^2}$$

$$a_n \le g$$

$$\frac{GM_x}{r^2} \ge \frac{4GMr}{R^3}; \quad \frac{M_x}{r^2} \ge \frac{4Mr}{R^3}; \quad M_x \ge \frac{4Mr^3}{R^3}; \quad 4Mr^3 \le M_x R^3; \quad r^3 \le \frac{M_x R^3}{4M}$$

$$r \le \sqrt[3]{\frac{M_x R^3}{4M}} \quad r \le R\sqrt[3]{\frac{M_x}{4M}};$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}; \quad v \approx 1{,}43\cdot10^{6}\ \text{м/с}$$

v – скорость движения спутника по орбите

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 3{,}6\cdot10^{3}\ \text{м/с}^2$$ – центростремительное ускорение спутника

$$r \le \sqrt{\frac{GM_x}{a_n}}$$ r – радиус спутника, иначе его разорвёт приливным ускорением

$$r_{max} = \sqrt{\frac{GM_x}{a_n}}; \quad r_{max} = 3{,}8\cdot10^{7}\ \text{м}$$

$$\rho_{min} = \frac{3M_x}{4\pi r_{max}^3}; \quad \rho_{min} = 1{,}5\cdot10^{6}\ \text{кг/м}^3$$ – минимальная плотность спутника

Спутник обладает огромной плотностью, на 3 порядка превышающей земную. Этим спутником, вероятно, является белый карлик.

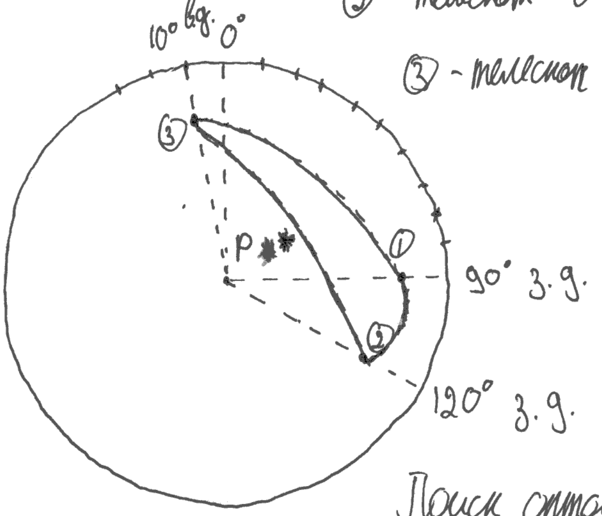
Ответ: $\rho = 1{,}5\cdot10^{6}$ кг/м^3

Телескопы уловили сигнал практически одновременно. Значит, они находились на одинаковом удалении от источника. Изобразим северное полушарие Земли:

① - телескоп LIGO в Ливингстоне

② - телескоп в Хэнфорде

③ - телескоп VIRGO



Изображено с учётом масштаба и проекции полусферы на плоскость. Сплошные линии (—) - ортодромии, соединяющие телескопы.

Поиск ортоцентра треугольника без вычислительной техники займёт большое кол-во времени и не будет очень точным, хотя он и возможен с помощью теоремы косинусов и синусов:

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A) \\ \dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)} \end{cases}$$

Вместо этого можно примерно определить положение источника „на глаз“. Он обозначен знаком (*). Его координаты: $\varphi \approx 70°$ с.ш.

$\lambda \approx 70°$ з.д.

Стоит отметить, что равноудалённая точка есть и в южном полушарии, но её оптическое наблюдение невозможно из обсерватории РАН.

Местное время этой точки в момент сигнала $t_* = 22^h - \frac{70°}{15°/h} \approx 17^h$

Прямое восхождение Солнца 31 декабря $\alpha_\odot \approx 18^h 30^m$

Склонение источника $\delta = \varphi = 70°$

Тогда прямое восхождение объекта: $\cancel{\alpha_* = \alpha_\odot - t_* \approx}$

$\alpha_* \approx 24^h - (24^h - 18^h 30^m - (17^h - 12^h)) = 23^h 30^m$

Ответ: $\delta = 70°$

$\alpha = 23^h 30^m$

Задача 4

Дано:

$\lambda = 5170{,}7\ \mathring{A}$

$\lambda_0 = 5174{,}1\ \mathring{A}$

$\lambda_1 = 5174{,}2\ \mathring{A}$

$\rho = 0{,}7\ г/см^3$

$I - ?$

Решение:

$\Delta\lambda_B = \lambda_1 - \lambda_0 = 0{,}1\ \mathring{A}$

$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_0} = \frac{v_B}{c}$; $v_B = \frac{c\Delta\lambda_B}{\lambda_0}$; $v_B \approx 5{,}7 \cdot 10^3$ м/с - экваториальная скорость вращения

$\Delta\lambda_g = \lambda_0 - \lambda = 3{,}4\ \mathring{A}$; $\frac{\Delta\lambda_g}{\lambda} = \frac{v_g}{c}$; $v_g = \frac{\Delta\lambda_g c}{\lambda} \approx 1{,}76 \cdot 10^5$ м/с

скорость движения (удаления)

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4G\pi R^2 \rho}{3}} = 2R\sqrt{\frac{G\pi\rho}{3}}$$ - максимально возможная скорость вращения. (иначе вещество отрывалось ~~бы~~ от звезды)

$\cancel{R = \frac{v_I}{2}\sqrt{\frac{3}{G\pi\rho}}}$; $\cancel{R_{MAX} = \frac{v_B}{2}\sqrt{\frac{3}{G\pi\rho}}}$ $\quad v_B \le v_I \le 2R\sqrt{\frac{G\pi\rho}{3}}$

$R \ge \frac{v_B}{2}\sqrt{\frac{3}{G\pi\rho}}$ R - радиус звезды

$R \ge 2{,}22 \cdot 10^8$ м

$M \ge 3{,}05 \cdot 10^{27}$ кг

Звезда меньше Солнца. Скорее всего это звезда ~~спе~~ спектрального класса М либо белый карлик. Она точно в нашей галактике, значит по v_g невозможно определить расстояние исходя из закона Хаббла. Движение вызвано вращением вокруг центра галактики.

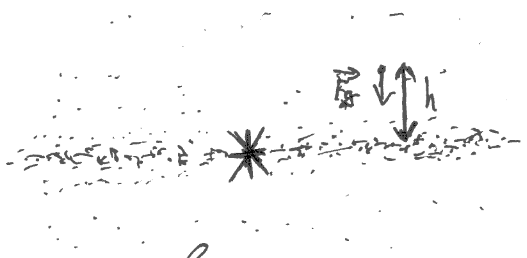
Для таких звёзд ~~выполняется~~ выполняется соотношение $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{2,3}$

Значит, при минимальной возможной массе в $3{,}05 \cdot 10^{27}$ кг L_{min} составляет $\approx 3 \cdot 10^{20}$ Вт. Ответ: $L_{min} \approx 3 \cdot 10^{20}$ Вт

Задача 5

Термодинамическое равновесие и гидростатическое равновесие.

Сила давления излучения звезды и равнодействующая силы гравитационного взаимодействия частиц создают ускорение, равное ускорению, необходимому для движения по окружности.



$$a_g = \frac{G(M_* + M_g)}{r}$$

для частицы в диске.

a_g - гравитационное ускорение

M_* - масса звезды

M_g - масса диска, находящегося внутри орбиты частицы (из теор. Гаусса)

r - расстояние до частицы

$a_* = \frac{L_0 c m}{4\pi r^2}$; a_* - ускорение частиц, создаваемое потоком излучения;

L_0 - светимость звезды; m - масса частицы

$a_g - a_* = \frac{v^2}{r}$; v - скорость вращения диска

Т.к. ~~диск~~ ~~без~~ размер диска много больше размера частицы газа, то сила притяжения к диску $\vec{F_g}$ практически не зависит от h. Зависимость $\rho(h)$ скорее всего имеет вид $\rho = \alpha e^{-\beta h} + \rho_0$; где ρ_0 - плотность диска в плоскости симметрии; e - экспонента; α и β - коэффициенты.

$I = \frac{L_0}{4\pi r^2}$ - зависимость яркости звезды от расстояния до неё