Задание 2. | Сте-5

$M = 1{,}4\ M_\odot$
$T = 0{,}03$ сут.
$m = 14{,}5\ M_{Ю}$
$\rho - ?$

Представим, что спутник движется по круговой орбите, тогда, зная период обращения спутника, по III закону Кеплера найдем радиус орбиты:

$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot a_\oplus^3}{T_\oplus^2}} = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_\oplus^2}}$$

$$a \approx 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt[3]{\frac{0{,}0009}{133000}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-9}} = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 3 \cdot 10^8\ (м)$$

Проверим, находится ли планета в полости Роша пульсара или за её пределами. Для этого найдём расстояние от пульсара до первой точки Лагранжа. Учитывая, что $m \ll M$, где m - масса спутника, а M - масса пульсара, расстояние равняется:

$$r = a\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

$$r \approx 3 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\frac{14{,}5 \cdot 317 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1{,}4}} \approx 3 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\frac{14 \cdot 320 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{30}}} = 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt[3]{3200 \cdot 10^6} \approx$$

$$\approx 3 \cdot 10^8 \cdot 15 \cdot 10^2 = 4{,}5 \cdot 10^{11}\ (м).$$

Как мы видим, расстояние до первой точки Лагранжа больше, чем радиус орбиты спутника. Значит, он находится в полости Роша пульсара.

Определим наименьший радиус спутника, чтобы приливные силы не разорвали его. Для того, чтобы этого избежать, ускорение, создаваемое гравитационными силами пульсара, должно быть больше ускорения, создаваемого приливными силами:

$$a_{грав} \geq a_{прил}$$

$$G\frac{m}{R^2} = 2G\frac{MR}{a^3}$$

$$R = a\sqrt[3]{\frac{m}{2M}}$$

$$R = 3 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\frac{14{,}5 \cdot 317 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{30}}} \approx 3 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\frac{14 \cdot 320 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{30}}} \approx 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt[3]{0{,}005}$$

Т.к. $0{,}1 < \sqrt[3]{0{,}005} < 0{,}2$, найдем примерное значение корня. Посчитав, что $0{,}15^3 = 0{,}003375$, попытаемся посчитать $0{,}17^3 = 0{,}004913$. Тогда $\sqrt[3]{0{,}005} \approx 0{,}17$

$$R \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}17 \approx 5 \cdot 10^7\ (м)$$

Теперь найдем плотность спутника:

$$\rho = \frac{m}{V} \approx \frac{\cancel{3} m}{4\cancel{\pi} R^3} \approx \frac{m}{4R^3}$$

$$\rho = \frac{14{,}5 \cdot 317 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot (5 \cdot 10^7)^3} \approx \frac{14 \cdot 320 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{23}} \approx 5{,}3 \cdot 10^4\ (кг/м^3) \approx 53\ г/см^3$$

Сравнивая полученную плотность спутника с плотностью Земли, понимаем, что вторая примерно в 10 раз меньше.

Ответ. $53\ г/см^3$

Задание 4.

Сте - 5

$\lambda_0 = 5170{,}7$ Å
$\lambda_1 = 5174{,}1$ Å
$\lambda_2 = 5174{,}2$ Å
$\rho = 700$ кг/м³

$L - ?$

Для нахождения наименьшей светимости нам необходимо узнать радиус и температуру звезды. По закону Стефана - Больцмана: $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$.
Из данных длин волн можно найти скорость вращения на экваторе с помощью закона Доплера:

$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ Следует отметить, что реальная длина волны увеличилась, значит, происходит красное смещение, т.е. звезда удаляется от нас.

Но нам важно, насколько быстрее край диска будет „убегать" от нас. Найдем такую скорость „убегания": $v = \frac{\Delta\lambda c}{\lambda_0} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)c}{\lambda_0}$

$$v = \frac{(5174{,}2 - 5174{,}1)\, 3\cdot 10^8 \cdot \cancel{10^{-10}}}{5170{,}7\cancel{\cdot 10^{-10}}} \approx \frac{0{,}1\cdot 3\cdot 10^8}{5200} \approx 5800 \text{ (м/с)}$$

Скорость на экваторе не может быть больше первой космической скорости, иначе звезда начнёт „разрушаться".

$v \le v_{Iкс}$

$v \le \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Используем предельный случай:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{G\frac{4\pi R^{\cancel{3}2}\rho}{3\cancel{R}}} = R\sqrt{G\frac{4\cancel{\pi}\rho}{\cancel{3}}} \approx R\sqrt{4G\rho} \approx 2R\sqrt{G\rho}$$, отсюда:

$$R = \frac{v}{2\sqrt{G\rho}}$$

$$R = \frac{5800}{2\cdot\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 700}} \approx \frac{6000}{2\cdot\sqrt{7\cdot 10^{-11}\cdot 700}} \approx \frac{3000}{2\cdot 10^{-4}} \approx 1{,}5\cdot 10^7 \text{ (м)}$$

Т.к. с самого начала нам известно, что звезда состоит из оксида титана, это означает, что её температура должна быть невысокой, иначе молекулярные связи могли бы распасться (оксид титана - молекула). Эта температура не должна превышать температуру плавления этого вещества, т.е. $T \approx 2000$ K. Тогда минимальная светимость звезды:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4$$

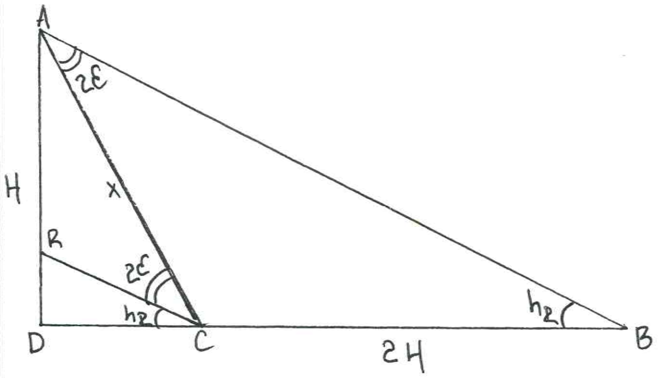
$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{1{,}5\cdot 10^4}{7\cdot 10^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2000}{6000}\right)^4 \approx \left(\frac{2}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx \frac{4}{10^4\cdot 81} \approx 5\cdot 10^{-6}$$

$$L = 5\cdot 10^{-6} L_\odot$$

Ответ. $5\cdot 10^{-6} L_\odot$

Задание 1.

Наибольшая разница длин теней будет между длинами теней в дни летнего и зимнего солнцестояний, когда высота Солнца максимальна и минимальна соответственно. Изобразим наглядно:



1. В день летнего солнцестояния высота Солнца максимальна, а склонение $\delta = \varepsilon = 23{,}5^\circ$
2. В день зимнего солнцестояния высота Солнца минимальна, а склонение $\delta = -\varepsilon = -23{,}5^\circ$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= 90^\circ - \varphi + \delta \\ h_2 &= 90^\circ - \varphi - \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h_1 - h_2 &= 2\delta = 2\varepsilon \\ h_1 - h_2 &= 47^\circ \end{aligned}$$

Пусть $AC = x$, тогда по теореме синусов: $\frac{x}{\sin h_2} = \frac{2H}{\sin 2\varepsilon} \Rightarrow \frac{H}{x} = \frac{\sin 2\varepsilon}{2\sin h_2}$

$$\begin{cases} \sin h_1 = \frac{H}{x} = \sin(h_2 + 45^\circ) = \frac{\sin 45^\circ}{2\sin h_2} \\ h_1 = h_2 + 45^\circ \end{cases}, \text{ где } \begin{aligned} &h_1 = \angle DCA = h_2 + 2\varepsilon \\ &h_1 - h_2 = 47^\circ \approx 45^\circ \text{ (для удобства счёта)} \end{aligned}$$

$$2\sin(h_2 + 45^\circ) \cdot \sin h_2 = \sin 45^\circ$$
$$2(\sin h_2 \cos 45^\circ + \cos h_2 \sin 45^\circ)\sin h_2 = \sin 45^\circ$$
$$\sin^2 h_2 \cos 45^\circ + \sin h_2 \cos h_2 \sin 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 h_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos h_2 \sin h_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin^2 h_2 + \cos h_2 \sin h_2 = \frac{1}{2}$$
$$2\sin^2 h_2 + \sin 2h_2 = 1$$
$$\cancel{2}\,\frac{1 - \cos 2h_2}{\cancel{2}} + \sin 2h_2 = 1$$
$$\sin 2h_2 - \cos 2h_2 = 0$$
$$\sin 2h_2 = \cos 2h_2$$
$$2h_2 = 45^\circ$$
$$h_2 \approx 23^\circ$$

Возвращаемся к исходному уравнению:

$$h_2 = 90^\circ - \varphi - \delta$$
$$h_2 = 90 - \varphi - 23^\circ$$
$$\varphi = 90 - 46 \approx 45^\circ$$

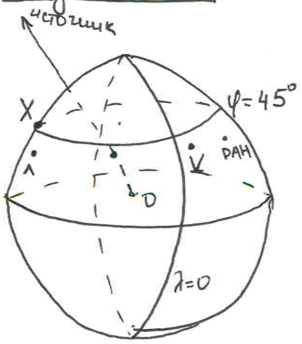
Мы рассматривали ситуацию для северного полушария Земли. Очевидно, что для южного картина будет аналогичная, поэтому искомая широта:

$$\varphi = \pm 45^\circ.$$

Ответ. $\pm 45^\circ$

Задание 3

Сте – 5



Λ – Ливингстон
X – Хэнворд
V – Вирго
РАН – обсерватория РАН
O – центр Земли

1. Найдем долготу λ_0, примерно равноудаленную от Хэнворда и Вирго:
$\lambda_{01} = \dfrac{119° + 10°}{2} \approx 65°$ – протяженность между этими двумя точками.
Но мы отсчитываем от долготы Гринвича, поэтому
$\lambda_0 = \lambda_{01} - 10° = 55°$ з.д.

$\Delta\varphi_0 \approx \dfrac{47° - 31°}{2} \approx 8°$

$\varphi_0 = 31° + 8 \approx 40°$

2. Точка с координатами $(\varphi_0; \lambda_0)$ – равноудалена от точек Λ, X и V. Можно считать, что в точке $(\varphi_0; \lambda_0)$ источник находится в зените, тогда $\delta \approx \varphi_0 \approx 40°$.
3. Время в точке $(\varphi_0; \lambda_0)$, когда в Гринвиче 22:00:
$T = 22^ч - 3^ч 20^м = 18^ч 20^м$
4. После 22 декабря прошло примерно 9 дней или иначе прямое восхождение Солнца увеличилось на 40 минут или 10°, тогда 31 декабря оно станет равным $18^ч 40$ мин. Значит, прямое восхождение самого источника примерно равно 1ч
5. Звездное время: $t_{зв} = t_\odot + \alpha_\odot$ $\quad \alpha = t_\odot - \alpha_\odot$
Солнечное время: $t_\odot = t - 12^ч$

Тогда координаты: $\delta = 40°$, $\alpha = 1^ч$

Ответ $(40°; 1^ч)$