Задача №2 КРЯ-14

Найдем большую полуось орбиты спутника a по III закону Кеплера [illegible] сравнив с Земл.-Сол.

$$\frac{T^2 M}{a^3} = \frac{T_\oplus^2 M_\odot}{a_\oplus^3}$$

Масса Юпитера в 330 раз больше Земли и $\approx \frac{1}{100}$ от Солнечной $\Rightarrow$ масса Спутника $\approx 0{,}15 M_\odot \Rightarrow$

$$a = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{T^2 M}{T_\oplus^2 M_\odot}} \qquad M = 1{,}4 M_\odot + 0{,}15 M_\odot = 1{,}55 M_\odot$$

$$a = a_\oplus \sqrt[3]{\left(\frac{\cancel{3}\cdot 10^{-2}}{\cancel{3{,}6}\cdot 10^2}\right)^2 \frac{1{,}55 \cancel{M_\odot}}{\cancel{M_\odot}}} = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{10^{-8}\cdot 1{,}55}{1{,}2^2}} = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{10^{-9}\cdot 0{,}16}{1{,}44}} = 10^{-3} a_\oplus \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \approx \frac{10^{-3} a_\oplus}{8} \approx$$

$$a \approx \cancel{[illegible]} = 10^{-4} a_\oplus \approx 1{,}5\cdot 10^8 \cdot 10^{-4} = 1{,}5\cdot 10^4 \text{ км} = 15\,000 \text{ км}$$

Данное расстояние очень небольшое по космическим меркам т.к. Радиус Юпитера $\approx 70\cdot 10^3$ км $\Rightarrow$ можно оценить примерную минимальную плотность, учесть, что $r \approx a$ (радиус пульсара порядка 10^1 км, что мало повлияет на результат) $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{330 \cdot M_\oplus \cdot 15}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\cdot 10^2 \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{3}\cdot 6 \cdot 10^{24}}{\cancel{4}\,\cancel{3{,}14} \cdot 15^3 \cdot 10^{18}} = \left(\frac{4{,}5\cdot 10^{9}}{125}\right) \approx 4\cdot 10^{6} \text{ кг/м}^3$$

Полученная плотность хоть и занижена (т.к. $r = a$), но она очень большая, сравнимая с плотностью белого карлика ~~или даже нейтронной звездой~~.
При такой плотности атомы тесно сблизились, преодолевая Кулоновские силы и либо протоны слипаются в нейтроны, либо атомы ионизируются все и появляется идеальный газ и „газ" из электронов (т.к. радиус ионизированным атомов много меньше обычного состояние)
Можно проверить, не является ли это тело черной дырой:

$$v = \cancel{\sqrt{\frac{2G\,0{,}15 M_\odot}{a}}} = \sqrt{\frac{2GM_c}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 10^2 \cdot \cancel{15}\cdot 6\cdot 10^{24}}{\cancel{15}\cdot 10^6}} = \sqrt{6^3\cdot 10^9} \approx 0{,}9c$$ — очень близка к световой.

Получается: либо это большое тело, белый карлик и тогда сам пульсар — спутник т.к. меньше по размерам (что очень странно)

- либо данный объект — компактная маломассивная чёрная дыра с плотностью 10^7 ($\div 10^{3-4}$) кг/м^3. Этот вариант ~~более~~ тоже правдоподобен. Состав вещества Ч.Д. — мало известен науке.
- либо этот объект — белый карлик, который состоит на $\approx 90\%$ из вырожденного $\bar{e}$ газа и на $\approx 10\%$ оболочка из идеального газа (+ незначительная часть остатков ядра обычной звезды)

Ответ: возможны два варианта, но скорее всего это белый карлик с уже описанными свойствами.

Задача №4

КРЯ-14

Оксид титана явно не находится в атмосфере Земли (в достаточном кол-ве) => этот тяжелый элемент находится в атмосфере довольно ~~...~~ старой звезды. Найдем скорость отдаления звезды от нас по эф. Доплера

$$v = \frac{c\cdot(\lambda_1-\lambda_0)}{\lambda_0} = \frac{3\cdot10^5\cdot(5174{,}1-5170{,}7)\cdot\cancel{10^{-10}}}{5174{,}1\cdot\cancel{10^{-10}}} \approx \frac{3\cdot10^5\cdot3{,}4}{5\cdot10^3} \approx 4{,}5\cdot10^2 \text{ км/с} \approx 450 \text{ км/с } (\ll c)$$

λ_0 - лаб. длина волны, λ_1 - в центре диска (т.к. отсутств. лучевая скорость вращение) т.к. $\Delta\lambda$ маленькая, то $z \ll 1$.

Теперь найдём линейную скорость вращение точек на экваторе звезды

$$v_r = \frac{c(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_0} \approx \frac{3\cdot10^5\cdot10^{-1}}{5\cdot10^3} \approx 0{,}6\cdot10^1 \text{ км/с} \approx 6 \text{ км/с}$$

$\rho = 7\cdot10^2$ кг/м³

Пусть M - масса звезды, R - её радиус, ρ - её плотность $\left(M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)$, тогда чтобы звезда не была разрушена центробежными силами: $v < v_{1к}$ =>

$$v < \sqrt{\frac{GM}{R}} < \sqrt{\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho} \Rightarrow R > \sqrt{\frac{3v^2}{4\pi G\rho}} > \frac{v}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi G\rho}}$$

т.к. нужно найти наименьшую $L_{зв}$, а $L \sim R^2$, то

$$R_{min} = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi G\rho}} = \frac{6\cdot10^3}{2}\sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3{,}14}\cdot\cancel{7}\cdot10^{-11}\cdot7\cdot10^2}} = \frac{3\cdot10^3}{7}\cdot\sqrt{10^9} \approx 5\cdot10^2\cdot10^{4,5} \approx 15\cdot10^6 \text{ м} = 1{,}5\cdot10^4 \text{ км}$$

$R \approx 15\,000$ км ($\approx 20\,000$ км)

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho = \frac{4\cdot3{,}14\cdot15^3\cdot10^{18}\cdot7\cdot10^2}{3} \approx 5\cdot10^6\cdot10^{20} = 5\cdot10^{26} \text{ кг} \quad \text{т.е.} \approx 0{,}001 M_\odot$$

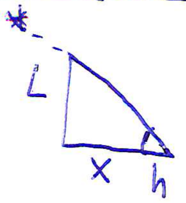
Данная звезда является красным карликом и её температуру можно оценить как $3\cdot10^3$ K (холоднее Солнца, и эта оценка чуть занижена для L_{min} т.к. $L_{зв} \sim T^4$) тогда можно оценить мин. светимость:

$$L = L_\odot\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4 = L_\odot\left(\frac{2\cdot10^4}{7\cdot10^5}\right)^2\left(\frac{3\cdot10^3}{6\cdot10^3}\right)^4 = L_\odot\left(0{,}1\cdot10^{-1}\right)^2\cdot\frac{1}{16} \approx 0{,}1\cdot10^{-5}L_\odot \approx 2\cdot10^{-6}L_\odot$$

Ответ: $L = 2\cdot10^{-6}L_\odot$ т.е. в 1 миллион раз тусклее Солнца ($M_{абс.} \approx 7{,}5^m - 8^m$)

Задача №1

КРЯ-14



L-длина гномона, h- высота Солнца в полдень, x -длина тени.

$L = \operatorname{tg} h \cdot x$

Самый простой случай в тропиках, где раз в год Солнце кульминирует в зените и $x_1 = 0$ а $x_2 = 2L \Rightarrow$ в это время высота Солнца видим:

$\operatorname{tg} h_2 = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 25°$ (если построить прямоуг. Δ и найти угол с помощью транспортира)

$h_2 = 90 - \varphi + \delta = 25°$

$\varphi = 65° + \delta$ т.к. h_2 это высота Солнца минимальная за год, то $\delta = -23{,}5°$

$\varphi = 65° - 23{,}5 = 41{,}5°$ - не удовл. условию, т.к. на этой широте Солнце не бывает в зените никогда т.к. $\varphi = \delta_☉$, $\delta_☉ \neq 41{,}5°$

Тогда запишем условие для произвольного x:

$L = \operatorname{tg} h_1 \cdot x = \operatorname{tg} h_2 (x + 2L) \quad h_1 > h_2$

$\frac{\operatorname{tg} h_1}{\operatorname{tg} h_2} = 1 + \frac{2L}{x}$ т.к. за год максимальная высота Солнца меняется на $23{,}5 \cdot 2 \approx 47°$, то:

$$\frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} (h - 47°)} = \frac{\sin h \cos(h-47°)}{\cos h \sin(h - 47°)} = \frac{\sin h (\cos h \cdot \cos 47° + \sin h \cdot \sin 47°)}{\cos h (\sin h \cos 47° - \cos h \cdot \sin 47°)} = 1 + \frac{2L}{x}$$

т.к. $47° \approx 45°$, то $\sin 47° \approx \cos 47° \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin h (\cos h + \sin h)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos h (\sin h - \cos h)} = \frac{\sin h \cdot \cos h + \sin^2 h}{\cos h \cdot \sin h - \cos^2 h} = 1 + \frac{2L}{x} = \alpha \Rightarrow$$

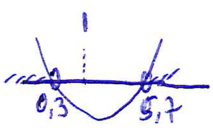
$$\sin^2 h + \sin h \cdot \cos h (1 - \alpha) + \cos^2 h\, \alpha = 0 \quad | : \cos^2 h$$

пусть $t = \frac{\sin h}{\cos h} \Rightarrow$

$$t^2 + t(1 - \alpha) + \alpha = 0$$

$$D = (1-\alpha)^2 - 4\alpha = 1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\alpha \geq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 1}}{2} \qquad \alpha^2 - 6\alpha + 1 \geq 0$$



$\alpha \geq 5{,}7$

Из такой сложной арифметики можно сделать вывод, что высота Солнца зависит от удлиненного значения тени т.е. от $x \Rightarrow$ на широтах от $(+23{,}5°; +66{,}5°)$ и $(-66{,}5°; 23{,}5°)$ найдется такая широта где тень удлинится на 2 длины шеста. Но минимальная длина тени зависит от широты $\Rightarrow$ удлинится на на любой из этих широт (± в пределах погрешности)

$>66{,}5°$ не может т.к. там бывают полярные дни и ночи, когда $h_{max} < 0$

Задача №5 КРЯ-14

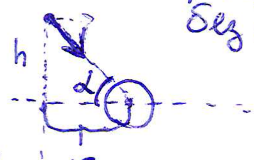
Т.к. диск в термодинамическом равновесии, то

$$PV=\frac{m}{\mu}RT \Leftrightarrow P=\frac{\rho}{\mu}RT \Rightarrow \rho=\frac{\mu P}{RT}$$

где P – давление в диске. Очевидно, что давление будет меняться от расстояние от звезды и от высоты:

$$P\sim F_{ц.}\approx\frac{\upsilon^2}{r}\cos\alpha$$

рисунок схематичен, без масштаба для наглядности



$F_{ц.}$ – центробежная сила которая направлена вдоль линии соединяющей центр звезды и частицы. ~~Горизонтальная~~ Вертикальная часть будет влиять на давление.
Ещё есть давление излучения, но в задаче не известна светимость звезды, да а можно считать, что оно не влияет на зависимость плотности от высоты т.к. эта сила очень маленькая, а под углом пренебрежимо мала

Рассмотрим давление на слой единичной площади S

$$P=\frac{F_ц}{S}=\frac{m\upsilon^2\cos\alpha}{Sr}=\frac{m\upsilon^2\cos\alpha}{r}=\frac{\rho\cdot V\cdot\upsilon^2\cos\alpha}{r}$$

где m – масса в-ва в единичном объёме и площади. Если это подставить в формулу для ρ, то плотность сократится ⇒ на плотность существенное влияние оказывает давление излучения ⇒

$$P=\frac{F_ц}{S}+P_{св.}=\frac{\rho\upsilon^2\cos\alpha}{r}+\frac{L\cdot 1\cdot\cos\alpha}{4\pi r^2 c}=\frac{\rho GM\cos\alpha}{r^2}+\frac{L\cos\alpha}{4\pi r^2 c}$$

υ – скорость вращения в-ва на расстоянии r ≈ равной $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ т.к. в-во не падает на звезду.

$$\rho=\frac{\mu}{RT}\left(\frac{\rho GM\cos\alpha}{r^2}+\frac{L\cos\alpha}{4\pi r^2 c}\right)$$

$$\rho\left(1-\frac{\mu GM\cos\alpha}{RTr^2}\right)=\frac{\mu L\cos\alpha}{4\pi RT r^2 c}$$

$$\rho=\frac{\mu L\cos\alpha\cdot\cancel{RTr^2}}{4\pi\cancel{RTr^2}c\,(RTr^2-\mu GM\cos\alpha)}=\frac{\mu L\cos\alpha}{4\pi c\,(RTr^2-\mu GM\cos\alpha)}$$

учитывая, что протопланетный диск недавно образовался и находится в равновесии, то температура $T(r)=const$ и $\mu(r)=const$. Также из геометрии ⇒ $\cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$ т.к. $h\ll r$, то $\cos\alpha\approx\frac{h}{r}$

$$\rho=\frac{\mu Lh}{4\pi rc\left(RTr^2-\frac{\mu GMh}{r}\right)}=\frac{\mu Lh}{4\pi c\,(RTr^3-\mu GMh)}$$

Задача №5

КРЯ-14

$$\rho(h) = \frac{\mu L h}{4\pi c(RTr^3 - \mu GMh)}$$

где L - светимость звезды
h - высота над плоскостью симметрии
c - скорость света
R - газовая постоянная
$\pi \approx 3{,}14...$ G - гравитац. постоянная
$L_\odot$ - светимость Солнца
$M_\odot$ - масса Солнца

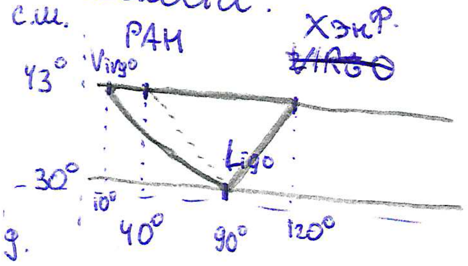
Учитывая, что $L \sim M^4$:

$$\rho(h) = \frac{\mu h}{4\pi c(RTr^3 - \mu GMh)} L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4$$

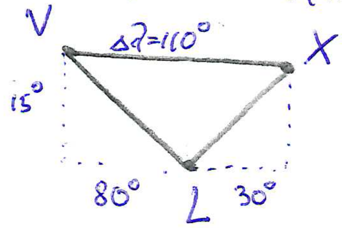
т.к. по условию диск очень тонкий, то выполняется условие $h \ll R$ эта формула справедлива для $h <$ толщины протопланетного диска и $h \ll r$ т.е. около звезды эта формула не даст правильной зависимости, но это не удивительно т.к. около молодой звезды нет пыли (вблизи).

$\boxed{\text{Задача №3}}$

т.к. разность широт невелика, то можно изобразить три пункта на плоскости:



Рассмотрим Δ V(irgo) X(энфорд) L(IGO) из обсерв.:



т.к. была разница во времени принятия сигнала, то он распространялся явно не сверху-вниз или наоборот.

Найдём расстояние между VIRGO и LIGO в Хэнфорде:

$$VX = \frac{110^\circ}{360^\circ}\cdot \cancel{2}\pi 6400\cdot\cos 45^\circ = \frac{\overset{5}{\cancel{11}}\cdot\pi\cdot \overset{1066}{6400}\sqrt{2}}{\cancel{18}\cancel{6}\cdot\cancel{2}} \approx 7100 \text{ км}$$