Задача № 1 Известно, что невооружённым глазом звезду можно увидеть только в максимуме блеска, т.е. $m_{max} \le 6^m$. Звезда имеет индекс „R" — буква, находящаяся в конце латинского алфавита. Обычно ~~все самые~~ звезды в созвездии получают свои индексы с начала греческого алфавита (чем ярче — тем первее буква), поэтому оценим блеск R Андромеды как равной 6^m. Тогда $\Delta m = 10^m$. Расстояние до звезды и её температура остаются постоянными, поэтому отношение освещённостей будет равно отношению площадей:

$$\frac{S_{max}}{S_{min}} = \frac{R^2_{max}}{R^2_{min}} = 10^{0.4\Delta m} = 10^{0.4 \cdot 10} = 10^4 \Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = 10^2$$

Один из радиусов равен $5 \cdot 10^2 R_\odot$. Рассмотрим оба случая.

I) $R_{max} = 5 \cdot 10^2 R_\odot$

$R_{min} = \frac{R_{max}}{10^2} = 5 R_\odot$

отсюда делаем вывод, что выполняется только этот вариант.

Тогда $v = \frac{\Delta R}{t} = \frac{495 R_\odot}{409 \text{ сут}} \approx \frac{500 R_\odot}{400 \text{ сут}} \approx \frac{5 R_\odot}{4 \text{ дн.}} \approx$

$\underline{v \approx \frac{5 R_\odot}{4 \text{ дн}} \approx 10 \frac{км}{с}}$

II) $R_{min} = 5 \cdot 10^2 R_\odot$

$R_{max} = 10^2 R_{min} = 5 \cdot 10^4 R_\odot$

В этом случае, максимальный радиус звезды равен $50000 R_\odot$. Это очень много и такая звезда вряд ли существует. (Например Бетельгейзе, одна из крупнейших мне известных, имеет радиус порядка 10 а.е. $\approx 5000 R_\odot < 50000 R_\odot$).

Задача № 2 $\nu = (2{,}5 \pm 0{,}5)\,10^{29}$ молекул   молярная масса молекул:

$\mu = 2 \cdot 16 \frac{г}{моль} = 32 \frac{г}{моль}$

Т.к. нам надо оценить давление, а не высоту атмосферы, воспользуемся моделью однородной атмосферы.

$$p = \rho_{атм} g h = \frac{m}{4\pi R^2 h} g h = \frac{\nu\mu}{N_A 4\pi R^2} g = \frac{\nu\mu}{N_A 4\pi R^2} \cdot \frac{GM}{R^2} = \frac{G\nu\mu M}{4\pi R^4 N_A}$$

здесь мы предположили, что $h \ll R$, а поэтому $g \approx const$ $\quad g = \frac{GM}{R^2}$

~~$pV = \nu RT \quad p \cdot (4\pi R^2 h) = \nu RT$~~

$$p = \frac{\nu\mu GM}{N_A 4\pi R^4} = \frac{\nu\mu \cdot G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi R^4 N_A} = \frac{\nu\mu G \rho}{3 R N_A} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{29} \cdot \frac{32 г}{моль} \cdot}{N_A \quad 3 \cdot 764 \cdot 10^3 м}$$

$\cdot \cancel{764 \cdot 10^3 м} \cdot 1{,}24 \frac{г}{см^3}$

$$\cancel{= \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{29} \cdot \frac{0{,}032 кг}{моль} \cdot 7{,}64 \cdot 10^5 м \cdot 1240 \frac{кг}{м^3}}{3}} =$$

$$\cancel{= \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}64 \cdot 1{,}24 \cdot 10^{29} \cdot 10^{-2} \cdot 10^5 \cdot 10^3}{3}} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 30{,}1 \cdot 10^{35}}{3}$$

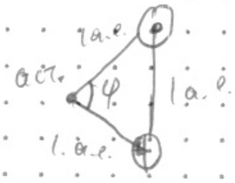
$$p = \frac{\nu\mu G\rho}{3RN_A} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{29} \cdot \frac{0{,}032 кг}{моль} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1240 кг}{м^3}}{3 \cdot 7{,}64 \cdot 10^5 м \cdot N_A} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{29} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot}{3 \cdot 7{,}64 \cdot 10^5 N_A}$$

$$\frac{\cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}24 \cdot 10^3}{} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 3{,}2 \cdot 6{,}67 \cdot 1{,}24}{3 \cdot 7{,}64 \cdot N_A} \cdot 10^{29-2-11+3-5} = \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 33{,}4}{N_A\, 3 \cdot 7{,}64} \cdot 10^{14} =$$

$$= \frac{(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 11}{N_A\, 7{,}64} \cdot 10^{14} = \frac{1{,}4 \cdot (2{,}5 \pm 0{,}5)}{N_A} \cdot 10^{14} = \cancel{(3{,}5 \pm 0{,}7)} \cdot \frac{10^{14}}{N_A} Па$$

$$= \frac{1{,}4 \cdot (2{,}5 \pm 0{,}25)}{6{,}03 \cdot 10^{23}} \cdot 10^{14} = 0{,}23 \cdot (2{,}5 \pm 0{,}25) \cdot 10^{-9} Па = (0{,}58 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-9} Па = \underline{(5{,}8 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-10} Па}$$

Задача № 4. Нарисуем момент, когда астероид находился на расст. 1 а.е. и от Солнца, и от Земли.



Мы получили равносторонний треугольник, т.к. от $\oplus$ до $\odot$ тоже 1 а.е. Тогда фазовый угол $\varphi = 60^\circ$.

Как известно, фаза от фазового угла зависит следующим образом: $\Phi = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \frac{1+\cos 60}{2} = \frac{1+1/2}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$

Запишем потоки: на аст. от Солнца: $E_\odot$ (солнечная постоянная, или на Земле)
от аст. к Земле: $\frac{E_\odot \cdot S \cdot \Phi}{4\pi a_\oplus^2}$

абс. зв. вел $\rightarrow \Phi = 1$
видимая зв. вел $\rightarrow \Phi = 0{,}75$

$\frac{E_{вид}}{E_{абс}} = \frac{\Phi_{вид}}{\Phi_{абс}} = \frac{0{,}75}{1} = 10^{0{,}4(m_{абс}-m)} = 10^{0{,}4\Delta m}$

$\Delta m = 2{,}5\lg 0{,}75 = 2{,}5\lg(1-0{,}25) = 2{,}5\frac{\ln(1-0{,}25)}{\ln 10} \approx 2{,}5\frac{-0{,}25}{3} = \frac{-0{,}625^m}{3} \approx \frac{-0{,}63^m}{3} \approx -0{,}21^m \approx -0{,}2^m$ Ответ: разница зв. вел $\approx 0{,}2^m$

Задача № 3 На первый взгляд может показаться, что ~~смещение~~ момента прохождения перигелия смещается только из-за вращения линии апсид, однако тут важно вспомнить, что календарный год не равен истинному, и это тоже влияет на смещение этого момента.

Для начала, посчитаем, насколько градусов повернется линия апсид, если у нее уходит 112 тыс. лет на 360°:

$$\alpha = \frac{20}{112\cdot10^3}\cdot360^\circ = \frac{1}{56\cdot10^2}\cdot360^\circ = \frac{360^\circ}{5600} = \frac{36}{560} \approx 0{,}064^\circ$$

посчитаем угловую скорость движения Земли вблизи перигелия:

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\frac{GM}{a_\oplus}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{a_\oplus\sqrt{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{a_\oplus^3}}\cdot\frac{\sqrt{1+e}}{1-e} = \omega_\oplus\cdot\frac{\sqrt{1+e}}{1-e} = \omega_\oplus\frac{\sqrt{1+0{,}011}}{1-0{,}011} =$$

$$= \omega_\oplus\frac{\sqrt{1{,}011}}{0{,}989} \approx \omega_\oplus(1+0{,}011)^{1/2}\cdot(1-0{,}011)^{-1} \approx \omega_\oplus(1+\tfrac{1}{2}\cdot0{,}011)(1+0{,}011) \approx$$

$$\approx \omega_\oplus\cdot1{,}011\cdot1{,}006 \approx 1{,}017\,\omega_\oplus = 1{,}017\cdot\frac{360^\circ}{365\text{ дней}}$$

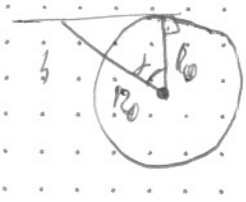
$$\Delta t = \frac{\alpha}{\omega_\oplus} = \frac{\frac{1}{56\cdot10^2}\cdot360^\circ}{1{,}017\cdot\frac{360^\circ}{365\text{ дней}}} = \frac{365\text{ дней}}{1{,}017\cdot56\cdot10^2} \approx \frac{365\text{ дней}}{5{,}7\cdot10^3} = \frac{3{,}65}{5{,}7\cdot10} \approx \frac{0{,}64}{10}\text{ дня} \approx$$

$$\approx \frac{15{,}36}{10}\text{ часа} \approx 1{,}5\text{ часа}$$

если взять за начало отсчета 2000 год (20 лет назад), ~~Если~~ ~~можно~~ который был високосным, можно сказать что каждый 3^й невисокосный год (перед високосным) происходит ~~„смещение“~~ ~~относительно~~ „отставание“ на ≈ 0,75 дня ≈ 18 часов. ~~относительно~~

~~по~~ примерная разница между 3 тропическими и 3 невисокосными годами

Задача № 5 Изобразим момент, когда основной корабль на горизонте.



$\cos\gamma = \frac{R_\oplus}{h+R_\oplus}$ т.к. $h \ll R_\oplus$, очевидно, что γ мал. Тогда:

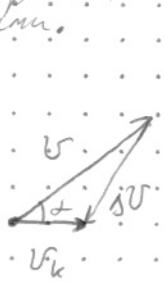
$$\cos\gamma = \frac{R_\oplus}{h+R_\oplus} = 1-\frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow \gamma^2 = 2\left(1-\frac{R_\oplus}{h+R_\oplus}\right)$$

$$\gamma = \sqrt{2}\sqrt{\frac{h+R_\oplus-R_\oplus}{h+R_\oplus}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{h}{h+R_\oplus}} \approx \sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{R_\oplus}} \approx \sqrt{2}\sqrt{\frac{70}{1700}} \approx$$

$$\approx \sqrt{2}\sqrt{\frac{7}{170}} \approx 1{,}4\sqrt{0{,}041} \approx 1{,}4\cdot\sqrt{0{,}04} \approx 1{,}4\cdot 0{,}2 = 0{,}28 \text{ рад} \approx 16^\circ$$

$\frac{\gamma}{2\pi} \approx 0{,}044$ (доля периода, необходимого, чтобы спутник поднялся до зенита).

Во время стыковки скорости обоих модулей ~~и их нап~~ должны быть равными, а направления совпадающими, иначе произойдёт столкновение и авария, а не стыковка. Значит, в конечном итоге лунный модуль должен будет двигаться по той же круговой орбите. Т.к. будем считать, что в начальный момент полёта, или только мы стартанули, в этой точке орбита касается Луны. ~~Очевидно~~ Тогда, чтобы попасть на высоту 70 км, нашей начальной траекторией должен быть эллипс, касающийся Луны и пересекающий орбиту основного модуля. Поскольку наши начальная и конечная орбита отличаются, так или иначе нам придётся потратить какое-то кол-во топлива для перехода между ними.



Пусть в момент, когда начальная орбита пересекается с круговой, наша скорость равна v и угол между ней и конечной скоростью v_k равен α. (он также равен углу между v и её тангенциальной составляющей v_τ)

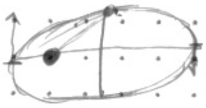
~~Очевидно~~ $v = \sqrt{GM}\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}$ [интеграл энергии]

Задача № 5

~~$2 - 1{,}04 - \frac{1}{1{,}04} + 1{,}04e - \frac{e}{1{,}04} \approx 0{,}96 - 0{,}96 + 1{,}04e - 0{,}96e = 0$~~

~~$e = 0$~~

~~тривиальный случ.~~



Из картинки со страницы 5 видно, что чем меньше угол α, тем меньше Δv. Он минимален и равен 0 в перигелии и афелии.

в тоже время можем заметить, что чем v ближе к v_a по значению тем Δv также меньше.

$v = v_k$ в момент прохождения малой полуоси

но угол будет не минимален и будет равняться!

$$m R_0 \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \sqrt{1+e} = m \sqrt{GM} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1-e}{R_0}}\, r \sin\alpha$$

[момент импульса сохраняется]

здесь уже нужно знать e, т.к. то что модуль имеет скорость $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ на малой оси означает что $r = a$

тогда $R_0 = r(1-e)$

$1 - e = \frac{R_0}{r}$

$e = 1 - \frac{R_0}{r}$

$$\sqrt{\frac{(1+e)R_0}{R_0}} = \sqrt{2r - (1-e)\frac{r^2}{R_0}}\, \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{(1+e)R_0}}{\sqrt{2r - (1-e)\frac{r^2}{R_0}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)R_0}}{\sqrt{2r - \frac{R_0}{r}\cdot\frac{r^2}{R_0}}} = \frac{\sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)R_0}}{\sqrt{2r - r}} = \frac{\sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)R_0}}{\sqrt{r}} = \sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{r}\right)\frac{R_0}{r}} = \sqrt{\left(2 - \frac{R_0}{R_0+h}\right)\ldots}$$

$$\frac{R_0}{r} = \frac{R_0}{R_0+h} = \left(\frac{R_0+h}{R_0}\right)^{-1} \approx (1+0{,}04)^{-1} \approx 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$

$$\sin\alpha = \sqrt{(2 - 0{,}96)\cdot 0{,}96} = \sqrt{1{,}04\cdot 0{,}96} \approx \sqrt{0{,}9984} \approx 1$$

$\alpha \approx 90°$ ← в таком случае

$\Delta v = \sqrt{v^2 + v_a^2} = \sqrt{2}\, v_a$

достаточно много

если сделать маневр в афелии:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\sqrt{1-e} \quad \left[~~R_0 = a(1+e)~~ \; a = \frac{R_0 + r}{2} \quad a(1-e) = R_0 \quad 1 - e = \frac{2R_0}{R_0+r} \quad e = \frac{R_0 + r - 2R_0}{R_0 + r} \right.$$

$$\left[e \approx 0{,}02 \leftarrow e \approx \frac{h}{2R_0} \leftarrow e = ~~\left(\frac{2R_0}{h}+1\right)~~ \leftarrow ~~e = \left(\frac{2R_0 + h}{h}\right)^{-1}~~ \leftarrow e = \frac{r - R_0}{R_0 + r} = \frac{h}{2R_0 + h} \right]$$

Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада

Теоретический тур. 2 февраля 2020 года

Код участника Мос-57

Номер страницы

Задача № 5 $v_H = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ $\Delta v = v_H - v = \sqrt{\frac{GM}{r}} - \sqrt{\frac{GM}{r}}\sqrt{1-e} =$

$= \sqrt{\frac{GM}{r}}\left(1-(1-e)^{1/2}\right) \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}}\left(1-(1-\frac{e}{2})\right) = \sqrt{\frac{GM}{r}}\cdot\frac{e}{2} \simeq 0{,}01\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{1}{100}v_H$

В этом случае $\Delta v_H \ll \Delta v$ с $v = v_H$, поэтому выгоднее всего будет ~~пер~~ переходить на круговую орбиту в афелии.

[На самом деле можно было просто воспользоваться фактом, что гомановские эллипсы — наиболее эффективный способ перехода между орбитами]

Теперь мы знаем, что стартует со скоростью $v_H = \sqrt{\frac{GM}{R_Л}}\sqrt{1+e} \simeq$

$\simeq \sqrt{\frac{GM}{R_Л}}\sqrt{1{,}02} \simeq \sqrt{\frac{GM}{R_Л}}\cdot 1{,}01$ и знаем, что она сравнима со скоростью основного модуля. $v_H \approx \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{81\cdot 1{,}74\cdot10^{6}}}\cdot 1{,}01 \simeq \sqrt{2{,}8\cdot10^{6}}\cdot 1{,}01 \simeq 1{,}68\cdot 1{,}01\cdot 10^3 \simeq$

$\boxed{\simeq 1{,}70\cdot10^3 \frac{м}{с}}$

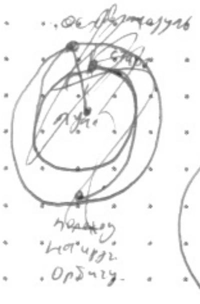
Лунный модуль достигнет афелия, где перейдёт на круговую орбиту, через полупериод: $\frac{P}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi a}{v_H} = \frac{1}{2}\frac{2\pi\cdot\frac{R_Л}{1-e}}{v_H} \simeq \frac{1}{2}\frac{2\pi R_Л\cdot 1{,}02}{v_Л} =$

$= \frac{1}{2}\frac{2\pi\cdot 1{,}74\cdot10^3\,км\cdot 1{,}02}{1{,}7\cdot10^3\frac{км}{с}} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}02^2\cdot 2\pi\cdot 10^3\,с \simeq \frac{1}{2} 1{,}08\cdot 6{,}17\cdot 10^3 \simeq 6{,}53\cdot10^3\,с\cdot\frac{1}{2} \simeq 3{,}27\cdot10^3\,с$

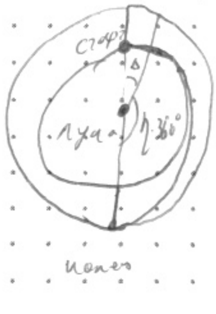
Когда лунный модуль достигнет точки афелия и перейдёт на круговую орбиту, основной модуль уже, возможно, будет подлетать к тому же месту.

период основного модуля: $P_{осн} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = \frac{2\pi a\cdot 1{,}02}{v_H\sqrt{\frac{1}{1{,}02}}} = P\cdot 1{,}02^{3/2} \simeq P\cdot 1{,}02\cdot 1{,}01 \simeq$

$\simeq \boxed{1{,}03\,P}$



основной модуль за время полёта лунного пройдёт по своей орбите



$\eta = \frac{P/2}{P_{осн}} = \frac{1}{2\cdot 1{,}03} = \frac{1}{2{,}06} \simeq$

$\simeq \frac{1}{2}\,0{,}97 \simeq 0{,}485$ доли орбиты

$\Delta = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\eta\right) = 0{,}015\cdot 2\pi \simeq \boxed{5{,}4^\circ}$

Задача № 5. Мы уже посчитали, что когда на горизонт появится основной модуль, ему оставалось $\angle 16^\circ$ до зенита. После зенита он уже будет пройти угол Δ, чтобы встретиться с ~~основ~~ лунным. Тогда, с момента, когда показался на горизонте основ. модуль и до старта лунного должно будет пройти: $\frac{\Delta+\gamma}{360^\circ} \cdot P_{осн} = \frac{16+5,7}{360} \cdot 6,53 \cdot 10^3 c \cdot 1,03 \approx$
$\approx 0,41 \cdot 10^3 c = 410 c = 6,83$ мин

Ответ: через 6,83 мин, ~~в~~ так чтобы скорость стартовая была сонаправлена со скоростью основного модуля в зените. Сама скорость равна $\approx 1,7 \cdot 10^3 \frac{м}{с} = 1,7 \frac{км}{с}$

Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

Теоретический тур. 2 февраля 2020 года

Код участника Мос-57

Задача № 3 Разница между моментами прохождения перигелия: 11 часов 1 января − 4 часа 2 января = 7 часов 3 дня = 72+7 = $\underbrace{79 \text{ часов}}$

Как мы уже посчитали, вращением линии апсид могло быть вызвано смещение лишь ≈ 1,5 часов

остальные колебания в ≈ 77,5 часа вызываются тем, что календарь ~~шах~~ в невисокосные годы отстаёт на 0,2522 сут ≈ 6,05 часа, а в високосные нагоняет 24 часа, но на 4·6,05−4·6 = 0,2 часа всё равно продолжает отставать.

за эти 20 лет сместилось на 77,5 часов из-за календ. ~~в~~ Чтобы попасть в 00:00 01.01 нужно от ~~a~~ ~~4 утр~~ 4 утра 2 янв ещё отличиться на 24·2+4 = 52 часа. Из них: $52 = 77{,}5 \cdot \frac{N}{20} + 1{,}5 \cdot \frac{N}{20} = \frac{N}{20} \cdot 79$

N – кол-во лет до 2020 года

$\frac{52}{79} \cdot 20 = N = 12{,}8$ лет

не целое.

Значит нужно сместиться на такое кол-во лет, чтобы сместилось на 52 + 365·24 часа ≥ ~~?~~ ...