Сте-10

№4

Оценим скорость вращения звезды из эффекта Доплера: $\vartheta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c \approx \frac{1\cdot10^{-1}}{5\cdot10^{3}}\cdot3\cdot10^{8} =$
$= 0{,}6\cdot10^{4} = 6\cdot10^{3}$ м/с

Максимально-возможная скорость вращения звезды – это первая космическая, тогда мы можем определить минимальный радиус:

$$\vartheta \leqslant \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{G\rho 4\pi R^3}{3R}} \Rightarrow R_{min} = \vartheta\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \approx 6\cdot10^3\sqrt{\frac{3}{4\cdot3\cdot7\cdot10^2\cdot7\cdot10^{-11}}} \approx$$

$$6\cdot10^3\cdot\sqrt{\frac{1}{200\cdot10^{-9}}} = \frac{6}{\sqrt{20}}\cdot10^3\cdot10^4 = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot10^7 \approx 1{,}5\cdot10^7\ м \approx \frac{1{,}5\cdot10^7}{7\cdot10^8}R_\odot \approx 0{,}02R_\odot$$

Поскольку у звезды наблюдается линия молекулярного соединения (оксида титана), то звезда относится к холодным звездам – бурым карликам, характерная температура которых $T \approx 2\cdot10^3$ K

По закону Стефана–Больцмана: $L = \sigma T^4 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{L_{min}}{L_\odot} = \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4\cdot\left(\frac{R_{min}}{R_\odot}\right)^2 \approx$

$$\cancel{L = \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4\frac{R}{R_\odot}} \approx \left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot4\cdot10^{-4} \approx \frac{4}{80}\cdot10^{-4} = 5\cdot10^{-6} \Rightarrow L_{min} \approx 5\cdot10^{-6}L_\odot$$

Ответ. $5\cdot10^{-6}L_\odot$

№2

Оценим минимальную плотность вещ-ва спутника на основе действия приливных сил:
Ускорение, действующее на спутник со стороны звезды: $a = \frac{GM}{r^2}$ где M – масса звезды, r – радиус орбиты спутника.

Приливное ускорение (разность ускорений в центре и на поверхности спутника):

$a_{прил} = \Delta a = |a'(r)\Delta r| = \frac{2GM}{r^3}\Delta r = \frac{2GMR}{r^3}$ где $\Delta r = R$ – радиус спутника

Чтобы для спутник не разорвало приливные силы должны быть меньше гравитационных со стороны планеты:

$\frac{2GMR}{r^3} < \frac{Gm}{R^2} \Rightarrow R < \sqrt[3]{\frac{m}{2M}}r$, где пол-ая $m = 14{,}5M_♃ \approx 15\cdot3\cdot10^2M_\oplus$ – масса спутника

По III закону Кеплера: $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{GM}$ (т.к. $M \gg m$) $\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}GM}$

$$\Rightarrow R_{max} = \sqrt[3]{\frac{m}{2M}\frac{T^2}{4\pi^2}GM} = \sqrt[3]{\frac{mT^2G}{8\pi^2}}$$

Минимальная плотность спутника $\rho_{min} = \frac{3m}{4\pi R_{max}^3} = \frac{3m}{4\pi}\frac{8\pi^2}{mT^2G} = \frac{6\pi}{T^2G} \approx$

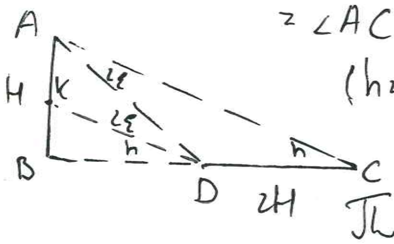
$$\approx \frac{6\cdot 5}{(3\cdot10^{-2}\cdot 24\cdot 36\cdot 10^{2})^2\cdot 7\cdot 10^{-11}} \approx \frac{6\cdot 5}{(10^{2}\cdot10^{-2}\cdot10^{2}\cdot 25)^2\cdot 7\cdot10^{-11}} \approx \frac{6\cdot 3}{6\cdot10^{2}\cdot10^{4}\cdot 7\cdot 10^{-11}} \approx$$

$\approx 0{,}5\cdot10^{5} = 5\cdot10^{4}$ кг/м^3

Итак, вещество довольно плотное: его самая нижняя оценка на порядок больше плотности Земли, самой плотной (по средней плотности) планеты СС.

N1

Для начала рассмотрим случай обеих верхних кульминаций к югу, разность между наибольшей и наименьшей из них 2ε. Изобразим ситуацию геометрически: $H = AB$ – гномон; BD – наименьшая тень; BC – наибольшая тень; $\angle HDB = \angle ACB = h$ – наименьшая за год высота Солнца в верхней кульминации ($h = 90 - \varphi - \varepsilon$), тогда



По теореме синусов: $\frac{AD}{\sin h} = \frac{2H}{\sin 2\varepsilon} \Rightarrow AD = 2H\frac{\sin h}{\sin 2\varepsilon}$

Площадь $\triangle ADC$: $S_{ADC} = AB\cdot DC/2 = H^2$

с другой стороны: $S_{ABC} = \frac{AD\cdot DC}{2}\cdot\sin(h+2\varepsilon) = \frac{2H\cdot\sin h\cdot 2H\cdot\sin(h+2\varepsilon)}{2\sin 2\varepsilon}$

$\Rightarrow 2H^2\sin h(\sin h\cos 2\varepsilon + \sin 2\varepsilon\cdot\cos h) = H^2$

$\Rightarrow 2\sin^2 h\cos 2\varepsilon + 2\sin h\cos h\cdot\sin 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon$

поскольку $2\varepsilon \approx 45^\circ$, то $\cos 2\varepsilon \approx \sin 2\varepsilon \Rightarrow$ на них можно разделить

$\Rightarrow 2\sin^2 h + 2\sin h\cos h - 1 = 0$. Поскольку $\cos 2h = \cos^2 h - \sin^2 h = 1 - 2\sin^2 h$, то $2\sin^2 h = 1 - \cos 2h \Rightarrow 1 - \cos 2h + \sin 2h - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2h = \cos 2h \Rightarrow 2h = 45^\circ$

$\Rightarrow h \approx 23^\circ$; $\varphi = 90 - \varepsilon - h \approx 45^\circ$

В южном полушарии (случай кульминаций к северу) все будет симметрично и искомая широта там $\varphi = -45^\circ$. Если же дело происходит в тропиках ($|\varphi| < \varepsilon \approx 23^\circ$) и Солнце может кульминировать как к югу, так и к северу, то в какой-то момент оно окажется в зените и минимальная длина тени окажется ноль, тогда максимальная, по условию, будет $2H$, а высота Солнца над горизонтом в этот момент $h = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < 30^\circ$, но Солнце в верхней кульминации на тропических широтах никогда не опускается так низко ($h_{min} = 90 - |\varphi| - \varepsilon > 40^\circ$)

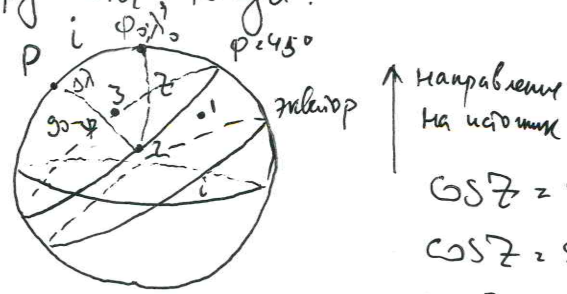
Итак, мы рассмотрели все возможные случаи.

Ответ: $\pm 45^\circ$

N3

Сте-10

Будем считать, что все три телескопа находятся на одинаковом расстоянии от точки, в которой источник наблюдается в зените (ее координаты $\varphi_0;\lambda_0$), т.е. все телескопы равноудалены от источника, т.к. во-первых $c\Delta t = 3\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^{5} = 900\text{км} \ll R_\oplus$, а во-вторых мы ищем лишь примерные координаты, тогда:



По сферической теореме косинусов для треугольника северный полюс ~~мира~~ — $\varphi_0;\lambda_0$ — телескоп

$$\cos z = \sin\varphi_1\cos i + \sin i\cos\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0)$$
$$\cos z = \sin\varphi_2\cos i + \sin i\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_0)$$
$$\cos z = \sin\varphi_3\cos i + \sin i\cos\varphi_3\cos(\lambda_3-\lambda_0)$$

где i – наклонение плоскости, перпендикулярной направлению на источник; z – угловое расстояние из центра Земли между точкой $\varphi_0;\lambda_0$ и телескопом. Индексы 1, 2 и 3 ~~соответствуют~~ принадлежат Ливингстону, Хэнфорду и телескопу Virgo. Поскольку Хэнфорд и телескоп VIRGO находятся почти на одной широте и равноудалены от точки $\varphi_0;\lambda_0$, то искомая долгота λ_0 равна половине ~~разности~~ суммы долгот λ_2 и λ_3 (Хэнфорда и Virgo) (в этом так же можно убедиться из рисунка или решая совместно 2 и 3 уравнения, считая $\varphi_2 \approx \varphi_3$)

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \approx \frac{120^\circ-10^\circ}{2} = 55^\circ \text{ з.д.}$$

Теперь, зная λ_0 можно решать совместно 1 и 2 уравнения (2 и 3 мы уже использовали)

$$\sin\varphi_1\cos i + \sin i\cos\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0) = \sin\varphi_2\cos i + \sin i\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_0)$$
$$\sin i\left[\cos\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0) - \cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_0)\right] = \cos i(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$
$$\mathrm{tg}\, i = \frac{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0)-\cos\varphi_2\cos(\lambda_2-\lambda_0)} \approx \frac{\cancel{0,27}\ \sin45^\circ-\sin30^\circ}{\cos30^\circ\cos35^\circ-\cos45^\circ\cos65^\circ}$$
$$\approx \frac{0,7-0,5}{0,9\cdot0,8-0,7\cdot0,4} = \frac{0,2}{0,7-0,3} \approx \frac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow i \approx 30^\circ$$

$$\delta = 90 - i \approx 60^\circ$$

Определим прямое восхождение: источник находился в зените (т.е. кульминировал, его часовой угол $t_{ист} = 0$) в точке с долготой $\lambda_0 = 55^\circ$ з.д. $= -55^\circ$ в.д.

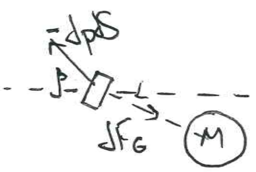
~~Местное время~~ в 22^h по Всемирному времени.

Местное время $T = UT + \lambda_0 = 22^h - 3^h40^m = 18^h20^m$

Прямое восхождение Солнца на 31 декабря $\alpha_\odot \approx 18^h40^m$ т.к.
с момент зимнего солнцестояния прошло ≈ 10 дней, т.е. $\approx 10^\circ \doteq 40^m$
Звездное время $S = t_\odot + \alpha_\odot = T - 12^h + \alpha_\odot = t_{нст} + \alpha_{нст}$
$\Rightarrow \alpha_{нст} = T - 12^h + \alpha_\odot = 18^h40^m + 18^h20^m - 12^h = 37^h - 12^h = 25^h = 01^h$

Ответ. $+60^\circ$; 01^h

N5



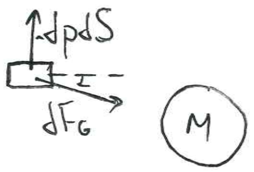
Запишем общий вид законов Ньютона для данной ситуации:
На вертикальную ось, вдоль которой порция газа покоится:

$$-dp\,dS\sin\beta = \frac{MG\rho\,dS\,dx}{x^2}\sin\alpha$$

где $x = \sqrt{r^2+H^2}$ – расстояние до порции газа; знак минус перед dp означает, что модуль давления уменьшается

На горизонтальную ось, равнодействующая сил вдоль которой обеспечивает вращение с угловой скоростью ω: $\rho\,dS\,dx\,\omega^2 r = \frac{MG\rho\,dx\,dS}{x^2}\cos\alpha - dp\,dS\cos\beta$

Нам, однако, неизвестно значение ω. Представим, что оно мало по сравнению с действием грав. силы ($\omega^2 r \ll \frac{GM}{r^2}$), тогда из сопоставления написанных уравнений $\sin\beta \approx \sin\alpha$ и поскольку $x = \sqrt{r^2+H^2} \approx r$ для плоского диска, получаем, что давление и, соответственно, плотность не зависят от H, а только от r. Вряд ли этот случай стоит продолжать рассматривать, учитывая вопрос задачи. Итак, чем больше ω тем сильнее проявляется зависимость от высоты и при больших ω ($\omega^2 r \approx \frac{GM}{r^2}$) $\sin\beta$ стремится к 1, т.е. изменение давления направлено вертикально.



В этом случае горизонтальная проекция грав. силы обеспечивает движение с угловой скоростью ω, а вертикальную уравновешивает изменение давления

$$-dp\,dS = \frac{MG\rho\,dS\,dH}{r^2}\sin\alpha, \text{ где } \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{r}$$

Для газа в термодинамическом равновесии $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ (из уравнения Клапейрона–Менделеева) $\Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu}$

$$\Rightarrow -\frac{RT}{\mu}d\rho = \frac{MG}{r^3}\rho H\,dH \Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{MG\mu}{RTr^3}\int_0^H H\,dH \Rightarrow \ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{MG\mu H^2}{2RTr^3}$$

$\Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{MG\mu}{2RTr^3}H^2}$, где ρ_0 – плотность в плоскости симметрии диска, то есть плотность вещества диска стремительно падает с высотой, это и объясняет его плоскость