Решение

(1.) Для начала определим угловой диаметр диска Земли (в см), пользуясь приведёнными фотографиями. Лучше всего это делать на последней фотографии, когда Земля достаточно поднялась над Лунным горизонтом. Из геометрии известно, что если выбрать какие-либо 2 точки на окружности, то перпендикуляры к касательным в них пересекутся в центре окружности. Тогда проделаем это с диском Земли; получится, что угловой радиус соответствует 0,9 см $\Rightarrow$ угловой диаметр $\sim 1{,}8$ см.

(2.) Когда мы определили угловой диаметр в см, можно узнать, скольким сантиметрам соответствует 1°. Считая, что высота орбиты спутника $h \ll L$ (L — расст. от Земли до Луны), получим, что $d_\oplus \approx \dfrac{2R_\oplus}{L}$ ($d_\oplus$ — угл. диаметр Земли).

Т.к. $L \approx 384 \cdot 10^3$ км, а $R_\oplus \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км

$\Rightarrow d_\oplus \approx \dfrac{2 \cdot 6{,}4}{384} = \dfrac{12{,}8}{384}$ (пока оставим эту дробь в таком виде до дальнейших вычислений) (1)

Из условия известно, что время между 2-мя последовательными снимками $\tau = 8$ с, а значит измеряя изменение высоты верхнего ~~...~~ края диска Земли между несколькими кадрами, можно узнать угловую скорость поднятия Земли над горизонтом Луны (видимым со спутника). Однако необходимо отметить, что Земля на снимках поднимается не строго вертикально, а под некоторым углом к вертикали. Так, например, между 2*-м и 6-м снимком разница в высоте $\sim 1{,}5$ см, а в горизонтальном смещении $\sim 0{,}3$ см $\Rightarrow$ ~~смещение при~~ общее смещение (см. рис.1):

* у 1-го снимка сложно найти верхнюю точку диска

$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta h^2} = \sqrt{0{,}09\ см^2 + 2{,}25\ см^2} = \sqrt{2{,}34\ см^2} \approx 1{,}5\ см$

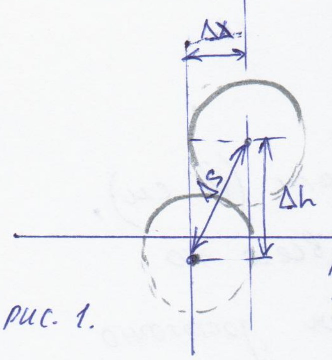


рис. 1.

$\Delta s = \frac{1{,}5}{1{,}8} d_\oplus = \frac{5}{6} d_\oplus$,

и угловая скорость ω поднятия над горизонтом:

$$\omega = \frac{\Delta S}{4\tau} = \frac{5}{24}\frac{d_\oplus}{\tau} \qquad (2)$$

т.к. между 2-м и 6-м

Установим теперь связь между ω и угловой скоростью ω' обращения спутника вокруг Луны (рис. 2):

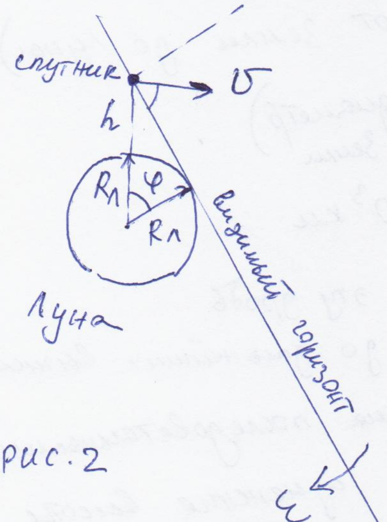


рис. 2

Если v – линейная скорость обращения спутника по лунной орбите, то

$$\omega = \frac{v \cdot \sin\varphi}{h + R_Л} = \omega' \cdot \sin\varphi \qquad (3)$$

Из рис. 2, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{R_Л^2}{(R_Л + h)^2}}$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{R_Л^2}{(R_Л+h)^2}}} \qquad (4)$$

$R_Л^4\left(1 + \frac{h}{R_Л}\right)^4 \simeq R_Л^4\left(1 + \frac{4h}{R_Л}\right)$

Центростремит. ускорение спутника

$$a = (\omega')^2 (h + R_Л) = \frac{GM_Л}{(R_Л + h)^2} \leftarrow \text{масса Луны}$$

$$\Rightarrow (\omega')^2 = \frac{GM_Л}{(R_Л + h)^3} \qquad (5)$$

← опустим здесь h, иначе будет ~~кубическое~~ ур-е 5-й степени

$$\frac{\omega^2}{1-\frac{R_л^2}{(R_л+h)^2}} \approx \frac{GM_л}{R_л^3} = \frac{GM_\oplus\cdot\frac{1}{81}}{\left(\frac{R_\oplus}{4}\right)^3} = \frac{64}{81}\cdot\frac{g}{R_\oplus}, \quad (5)'$$

$g \approx 9{,}81\ \frac{м}{с^2}$
(уск. свободного падения у поверхности Земли)

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{R_л^2}{(R_л+h)^2} = \frac{81\,\omega^2 R_\oplus}{64\,g};$$

$$\frac{R_л^2}{(R_л+h)^2} = 1-\frac{81}{64}\frac{\omega^2 R_\oplus}{g};$$

$$\frac{R_л}{R_л+h} = \sqrt{1-\frac{81}{64}\frac{\omega^2 R_\oplus}{g}};$$

$$R_л = \underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{81}{64}\frac{\omega^2 R_\oplus}{g}}\right)}_{=\lambda}(R_л+h) \quad (6)$$

$$\lambda = \sqrt{1-\frac{81}{64}\frac{\omega^2 R_\oplus}{g}} = \sqrt{1-\frac{81}{64}\cdot\frac{25}{24^2}\frac{d_\oplus^2 R_\oplus}{g\tau^2}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{3^4\cdot 5^2}{2^6\cdot 3^2\cdot 2^6}\cdot\frac{d_\oplus^2\cdot R_\oplus}{g\tau^2}} \approx \sqrt{1-\frac{225\cdot 9}{4096}\cdot\frac{12{,}8^2}{384^2}\cdot\frac{6{,}4\cdot 10^6\ м}{10\cdot 64\ м}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{225\cdot 9}{4096}\cdot\frac{12{,}8^2}{3842}\cdot 10^4} \approx \sqrt{1-\frac{225\cdot 169\cdot 9}{4\cdot 10^3\cdot 400^2}\cdot 10^4} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{225\cdot 169\cdot 9}{64\cdot 103}} = \sqrt{1-\frac{235525\cdot 9}{64000}}$$

~~не сходится~~
подкоренное выражение вообще отрицательное, значит $(R_л+h)^3$ заменить на $R_л^3$ нельзя.

В таком случае, снова обратимся к ур. (5'):

$$\frac{\omega^2}{1-\frac{R_л^2}{(R_л+h)^2}} = \frac{GM_л}{(R_л+h)^3};$$

$$GM_л = \frac{\omega^2(R_л+h)^5}{2R_лh+h^2} = \frac{\omega^2(R_л+h)^5}{2(R_л+\frac{h}{2})h} \approx \frac{\omega^2(R_л+h)^4}{2h};$$

$$\cancel{\frac{2GM_л}{\omega^2} \approx \left(\frac{R_л}{h^4}+\frac{1}{h^3}\right)}$$

$$\frac{2GM_л}{\omega^2}h = (R_л+h)^4 = R_л^4\left(1+\frac{h}{R_л}\right)^4 \approx R_л^4\left(1+\frac{4h}{R_л}\right)$$

$$\cancel{\lg\left(\frac{2GM_л}{\omega^2}\right)+\lg(h) = 4\lg(R_л+h)}$$

$$\cancel{\lg(R_л+h) \approx \lg(R_л)}$$

$$\cancel{\Rightarrow \lg(h) = 3\lg(R_л) - \lg\left(\frac{2GM_л}{\omega^2}\right);}$$

$$\Rightarrow \frac{2GM_л}{\omega^2R_л^4}h = 1+\frac{4h}{R_л};$$

$$h\left(\underbrace{\frac{2GM_л}{\omega^2R_л^4}-\frac{4}{R_л}}_{=\mu}\right) = 1 \qquad (7)$$

$$\mu = \frac{2 G M_\oplus \frac{1}{81}}{\frac{25}{24^2}\frac{d_\oplus^2}{\tau^2} R_\oplus^4 \cdot \frac{1}{4^4}} - \frac{16}{R_\oplus} =$$

$$= \frac{24^2 \cdot 2 \cdot 4^4}{25 \cdot 81} \cdot \left(\underbrace{\frac{G M_\oplus}{R_\oplus^2}}_{g \approx 10 \frac{м}{с^2}} \cdot \tau^2\right) \cdot \frac{1}{d_\oplus^2 R_\oplus^2} - \frac{16}{R_\oplus} =$$

$$= \frac{\cancel{3}^2 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 2^8}{25 \cdot \cancel{3}^2} \cdot \left(10 \frac{м}{с^2} \cdot 64 с^2\right) \cdot \frac{1}{(6{,}4 \cdot 10^6 м)^2 \cdot d_\oplus^2} - \frac{16}{R_\oplus} =$$

$$= \frac{2^{15}}{25} \cdot \frac{6{,}4 \cdot 10^2 м}{(6{,}4 \cdot 10^6 м) \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 м) d_\oplus^2} - \frac{16}{(6{,}4 \cdot 10^6) м} =$$

$$= \frac{2^{15}}{25} \cdot \frac{1}{10^4 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 м) d_\oplus^2} - \frac{16}{(6{,}4 \cdot 10^6 м)} =$$

$$= \frac{2^{15} - 16 \cdot d_\oplus^2 \cdot 25 \cdot 10^4}{25 \cdot 10^4 \cdot d_\oplus^2 (6{,}4 \cdot 10^6) м} \simeq \frac{2^{10}(32 - 4 \cdot 10^3 \cdot d_\oplus^2)}{25 \cdot 10^4 \cdot d_\oplus^2 (6{,}4 \cdot 10^6) м} =$$

~~По уравнению~~

$$\approx \frac{2^{10}\left(32 - 4 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^2\right)}{25 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{13}{390}\right)^2 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6) м} = \frac{2^{10} \cdot \left(32 - \frac{40}{9}\right)}{25 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-2} \cdot (6{,}4)^2 м} =$$

$$\approx \frac{10^3 (32 \cdot 9 - 40)}{10^8 \cdot 25 \cdot (6{,}4) м} = \frac{288}{10^5 \cdot 25 (6{,}4) м} = \frac{1}{\frac{160}{288}} \cdot 10^{-5} м =$$

$$\approx \frac{1}{\frac{4}{7}} \cdot 10^{-5} м.$$

$$** \; d_\oplus = \frac{12{,}8}{384} \simeq \frac{13}{390} = \frac{1}{30}$$

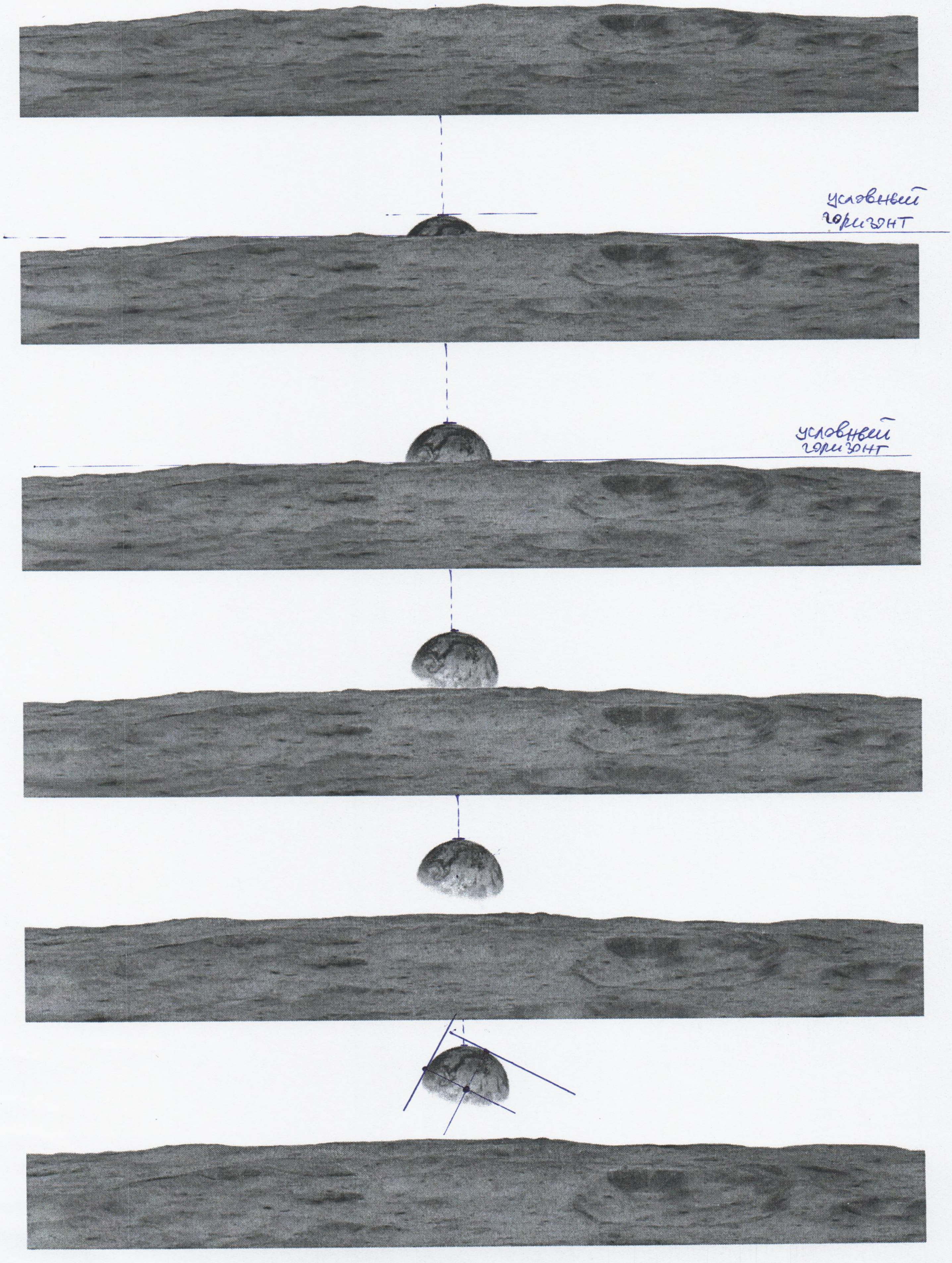
Итого $\mu \approx \frac{7}{4} \cdot 10^{-5} м$,

а значит $h = \mu^{-1}$ (из (7))

и $h \approx \frac{4}{7} \cdot 10^{5} м \approx 0{,}57 \cdot 10^{5} м = 57$ км

Ответ: высота спутника была около 57 км над поверхностью Луны

Примечание: здесь не была учтена сидерический период Луны.


условный
горизонт
условный
горизонт