10 класс

155 лист №1

Задача №1

Дано:
$T = 3{,}9$ года
$\Delta m = 2{,}5^m$

Найти:
e

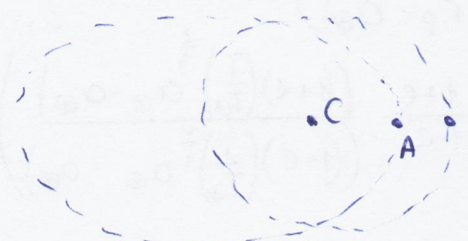
1) Амплитуда изменения зв. вел. по опр. амплитуды:

$$\Delta m = \frac{m_{max} - m_{min}}{2}$$

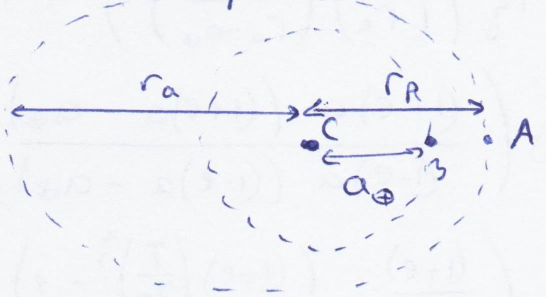
Очевидно, m_{max} достигается, когда астероид дальше всего от Земли и Солнца, т.е. в афелии, а m_{min} – когда ближе всего к Земле и Солнцу, т.е в перигелии.

2) Если бы астероид заходил во внутреннюю область орбиты Земли, то m_{max} достигалось бы, наоборот, в перигелии. Тогда бы ни один отражённый от астероида не попадал на Землю и $m_{max} = +\infty$. Такой случай невозможен, т.к. $\Delta m = 2{,}5^m$ => астероид всё время остаётся внешним телом по отношению к Земле.

неправильно:



правильно:



3) III з-н К:

$$\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 \Leftarrow a = \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} a_\oplus$$

4) расстояние до Солнца в перигелии:

$$r_p = (1-e)a$$

расстояние до Солнца в афелии:

$$r_a = (1+e)a$$

5) „светимость" астероида в перигелии:

$$L_p = \frac{L_\odot}{4\pi r_p^2} \cdot S \cdot A$$

альбедо астероида

площадь сечения астероида

„светимость" астероида в афелии:

$$L_a = \frac{L_\odot}{4\pi r_a^2} \cdot S \cdot A$$

Продолж. на обороте

6) max расстояние м/у Землёй и астероидом:

$$r_{max} = r_a - a_{\oplus}$$

min расстояние м/у Землёй и астероидом:

$$r_{min} = r_p - a_{\oplus}$$

7) освещённость от астероида:

максимальная: $E_{max} = \frac{L_p}{4\pi r_{min}^2} \cdot \varphi_p$ ← фаза = 1

минимальная: $E_{min} = \frac{L_a}{4\pi r_{max}^2} \cdot \varphi_a$ ← фаза = 1

8) з-н Погсона:

$$m_{max} - m_{min} = -2{,}5\lg\left(\frac{E_{min}}{E_{max}}\right) = -2{,}5\lg\left(\frac{\frac{L_a}{4\pi r_{max}^2}}{\frac{L_p}{4\pi r_{min}^2}}\right) =$$

$$= -2{,}5\lg\left(\frac{L_a}{L_p}\cdot\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^2\right) = -2{,}5\lg\left(\frac{\frac{L_\odot}{4\pi \cdot r_a^2}\cdot S\cdot A}{\frac{L_\odot}{4\pi r_p^2}\cdot S\cdot A}\left(\frac{r_p - a_\oplus}{r_a - a_\oplus}\right)^2\right) =$$

$$= -2{,}5\lg\left(\left(\frac{r_p}{r_a}\right)^2\left(\frac{r_p - a_\oplus}{r_a - a_\oplus}\right)^2\right) = 5\lg\left(\frac{r_a(r_a - a_\oplus)}{r_p(r_p - a_\oplus)}\right) =$$

$$= 5\lg\left(\frac{(1+e)a\,((1+e)a - a_\oplus)}{(1-e)a\,((1-e)a - a_\oplus)}\right) = 5\lg\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{(1+e)\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}}a_\oplus - a_\oplus}{(1-e)\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}}a_\oplus - a_\oplus}\right) =$$

$$= 5\lg\left(\frac{(1+e)}{(1-e)}\cdot\frac{(1+e)\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{(1-e)\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\right) = 2\,am = 2\cdot 2{,}5 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3{,}9\text{ лет}}{1\text{ год}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+e)}{(1-e)}\cdot\frac{(1+e)\cdot 2{,}5 - 1}{(1-e)\cdot 2{,}5 - 1} = 10^{\frac{5}{5}} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5(1+e) - 2)(1+e) = (5(1-e) - 2)(1-e)\cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5(1+e)^2 - 2(1+e)) = (5(1-e)^2 - 2(1-e))10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5 + 10e + 5e^2 - 2 - 2e) = (5 - 10e + 5e^2 - 2 + 2e)\cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5e^2 + 8e + 3) = (5e^2 - 8e + 3)\cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5e^2 + 8e + 3 = 50e^2 - 80e + 30 \Leftrightarrow 45e^2 - 88e + 27 = 0 \Leftrightarrow$$

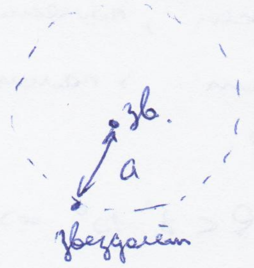
$$\Leftrightarrow e = \frac{88 \pm 54}{90} \approx \left[\begin{array}{l} 1{,}6 \text{ — не имеет физ смысла} \\ 0{,}37 \leftarrow (1 - 0{,}37)\cdot 2{,}5 = 1{,}5 > 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $= 0{,}37$.

Задача №4 (лист №2) 155

Дано:
$a = 0,5$ а.е.
$T = 0,25$ года
$S_{зв.в} = 1\,м^2$
$S_{изл} = 2\,м^2$
$\eta_{изл} = 30\%$
$\tau = 1$ год
$\alpha = 10^{-14}$
$v = 4\cdot10^2$ км/с

Найти: $\dfrac{E_{изл}}{E_{зв.в.}}$



1) III з-н К.:
$$\left.\begin{aligned} \frac{T^2}{4\pi^2} &= \frac{a^3}{GM} \\ \frac{T_\oplus^2}{4\pi^2} &= \frac{a_\oplus^3}{GM_\odot} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 \cdot \frac{M_\odot}{M} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_\oplus}{T}\right)^2 = \left(\frac{0,5\text{ а.е.}}{1\text{ а.е.}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1\text{ год}}{0,25\text{ года}}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^2 = \frac{16}{8} = 2 \Leftrightarrow M = 2M_\odot$$

2) Звезда на главной последовательности $\Rightarrow L_{изл} \sim M^{3,9} \approx M^4 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{L_{изл}}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 = 2^4 = 16 \Leftrightarrow L_{изл} = 16 L_\odot$$

время запасания
3) $$E_{изл} = \frac{L_{изл}}{4\pi a^2} \cdot S_{изл} \cdot \eta_{изл} \cdot \Delta t$$

4) Кинетическая энергия всего зв. в. за $\tau = 1$ год:
$$W_{зв.в.} = \frac{\alpha M \cdot v^2}{2}$$
$$L_{зв.в.} = \frac{W_{зв.в.}}{\tau} = \frac{\alpha M v^2}{2\tau} = \frac{\alpha \cdot 2M_\odot v^2}{2\tau} = \frac{\alpha M_\odot v^2}{\tau}$$

время запасания
5) $$E_{зв.в.} = \frac{L_{зв.в.}}{4\pi a^2} \cdot S_{зв.в.} \cdot \Delta t$$

6) Т.о.:
$$\frac{E_{изл}}{E_{зв.в.}} = \frac{\frac{L_{изл}}{4\pi a^2} \cdot S_{изл} \cdot \eta_{изл} \cdot \Delta t}{\frac{L_{зв.в.}}{4\pi a^2} \cdot S_{зв.в.} \cdot \Delta t} = \eta_{изл} \cdot \frac{S_{изл}}{S_{зв.в}} \cdot \frac{L_{изл}}{L_{зв.в.}} =$$
$$= \eta_{изл} \cdot \frac{S_{изл}}{S_{зв.в.}} \cdot \frac{16 L_\odot}{\frac{\alpha M_\odot v^2}{\tau}} = 16\,\eta_{изл} \cdot \frac{S_{изл}}{S_{зв.в.}} \cdot \frac{\tau L_\odot}{\alpha M_\odot v^2} =$$
$$= 16 \cdot 0,3 \cdot \frac{2\,м^2}{1\,м^2} \cdot \frac{3\cdot10^7\,с \cdot 3,8\cdot10^{26}\,Вт}{10^{-14}\cdot 2\cdot10^{30}\,кг \cdot (4\cdot10^5\,м/с)^2} = 3,5\cdot10^7$$

Ответ: $= 3,5\cdot10^7$.

Задача № 5

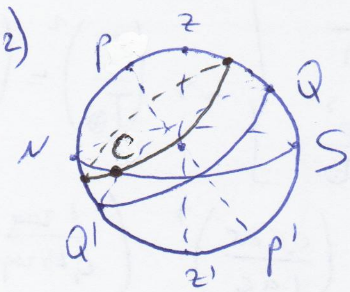
Дано:
$\rho < 4$ пальца
$|b_1| = 10^\circ$
$A_2 = 160^\circ$ в СПб
$\varphi = 60^\circ$

Найти: какая более яркая

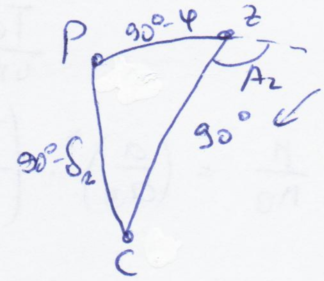
1) Между двумя звёздами не может „поместиться" 4 пальца, но, по всей видимости, может 3 пальца. Т.о. расстояние м/у звёздами ρ:

3 пальца $< \rho <$ 4 пальца $\Leftrightarrow$ $6^\circ\text{-}8^\circ < \rho < 8^\circ\text{-}10^\circ \Rightarrow \rho \approx 8^\circ$

2)



сф. тр-к PZC:



пренебрегаем рефракцией и понижением горизонта

сф. т. cos: $\cos(90^\circ-\delta_2) = \cos 90^\circ \cdot \cos(90^\circ-\varphi) + \sin 90^\circ \cdot \sin(90^\circ-\varphi)\cdot\cos(180^\circ-A_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\delta_2 = \cos\varphi \cdot \cos(180^\circ - A_2) = \cos 60^\circ \cdot \cos(180^\circ-160^\circ) =$

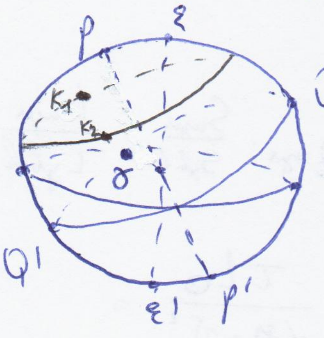
$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{55}{59} \approx \frac{9}{20} \Rightarrow \delta_2 = 27^\circ$

3) Т.к. $\delta_2 = +25^\circ$, а $\rho = 8^\circ$, то $b_1 = +10^\circ$ – 1-ая звезда находится в северном эклиптическом полушарии.

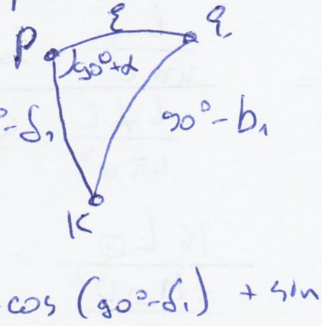
($\delta_2 - \varepsilon - \rho = 27^\circ - 23{,}5^\circ - 8^\circ = -4{,}5^\circ > -10^\circ$, но $\delta_2 + \varepsilon + \rho = 27^\circ + 23{,}5^\circ + 8^\circ = 68{,}5^\circ > 10^\circ \Rightarrow b_1 \in [-4{,}5^\circ; 68{,}5^\circ]$, $|b_1| = 10^\circ \Rightarrow b_1 = +10^\circ$)

4) Т.к. ρ достаточно мало, то будем считать, что $\delta_1 = \delta_2 = 27^\circ$ (нам нужно лишь приблизительно определить область неба, где находятся две звезды)

5)



сф. тр-к $P\varepsilon K$:



сф. т. cos: $\cos(90^\circ - b_1) = \cos\varepsilon\cdot\cos(90^\circ-\delta_1) + \sin\varepsilon\cdot\sin(90^\circ-\delta_1)\cos(90^\circ+\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin b_1 = \cos\varepsilon\sin\delta_1 - \sin\varepsilon\cdot\cos\delta_1\cdot\sin\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\cos\varepsilon\sin\delta_1 - \sin b_1}{\sin\varepsilon\cos\delta_1} = \frac{\cos 23{,}5^\circ \cdot \sin 27^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 23{,}5^\circ\cdot\cos 27^\circ} =$

Продолж. на след. листе

Продолж. задачи 5

$$= \frac{\frac{54}{60}\cdot\frac{24}{60}-\frac{10}{60}}{\frac{24}{60}\cdot\frac{53}{60}} = \frac{54\cdot 27-10\cdot 60}{24\cdot 53} = \frac{14}{31} \Rightarrow \alpha = 25^\circ \text{ или } 155^\circ$$

б) $\alpha = 25^0$, $\delta = 25^0$ — область в районе Близнецов ⇒ звёзды Поллукс и Кастор

$\alpha = 155^0$, $\delta = 25^0$ — область в районе Змееносца ⇒ нет ярких звёзд

Ну вроде бы Поллукс ярче Кастора и он по ощущениям находится на расстоянии $\simeq 10^0$ от эклиптики ⇒ 1-ая звезда ярче.
(Поллукс южнее Кастора)

Ответ: 1-ая звезда ярче (походу, Поллукс)

Задача № 3

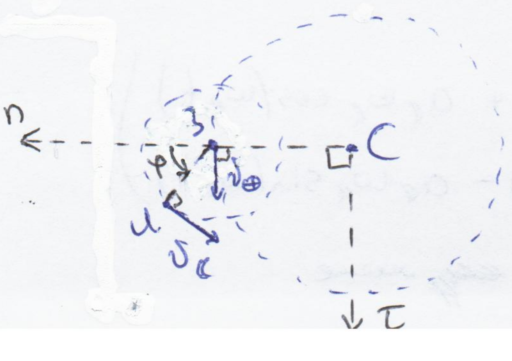
Док-ть: проекция траектории движения Луны относительно Солнца на пл-ть эклиптики не имеет самопересечений и везде выпукла наружу.

Док-во: т.к. эксцентриситеты Луны и Земли малы ($e_☾ = 0{,}05$ и $e_\oplus = 0{,}017$), то можно считать, что они движутся по круговым орбитам. Также из-за того, что угол м/у плоскостью орбиты Луны и эклиптикой равен $i_☾ = 5{,}1^0$, то $\cos i_☾ \simeq 1$ и можно считать, что проекция круговой орбиты Луны на плоскость эклиптики также является круговой орбитой. Т.о. у нас следующая модель: в пл-ти эклиптике находятся С, Л и З; З вращается вокруг С по кругл. орбите; Л вращается вокруг З по круг. орбите.

Рассчитаем ск-ти движения по круг. орбитам Земли и Луны:

$$v_\oplus = \frac{2\pi a_\oplus}{T_\oplus} = \frac{2\cdot 3\cdot 1{,}5\cdot 10^8 \text{ км}}{3\cdot 10^7 \text{ с}} = 30 \text{ км/с}$$

$$v_☾ = \frac{2\pi a_☾}{T_☾} = \frac{2\cdot 3\cdot 384\,000 \text{ км}}{27 \text{ сут}} \simeq 1 \text{ км/с}$$



Запишем координаты скорости Луны относительно Солнца в данной вращающейся вместе с Землёй СК (см. рис.)

$$v_\tau = v_\oplus + v_☾\cdot\cos\varphi = (30 + 1\cdot\cos\varphi) \text{ км/с}$$

$$v_n = -v_☾ \sin\varphi = (-1\cdot\sin\varphi) \text{ км/с}$$

Продолж. на обороте

Как видно из выражения для δ_τ, оно положительно при любых φ $\to$ у траектории Луны не будет самопересечений. (для самопересечения необходимо временное движение в обратную сторону, т.е. $\delta_\tau < 0$).

Для док-ва выпуклости траектории зафиксируем ~~удачную~~ некоторую СК ~~и рассмотрим движение Луны за небольшой промежуток времени в этой СК. Запишем координаты Луны в момент фиксации СК. в данной СК~~ уравнение движения Луны в этой СК:

$$\tau = a_☾ \cdot \sin\varphi$$

$$n = a_\oplus + a_☾ \cdot \cos\varphi$$

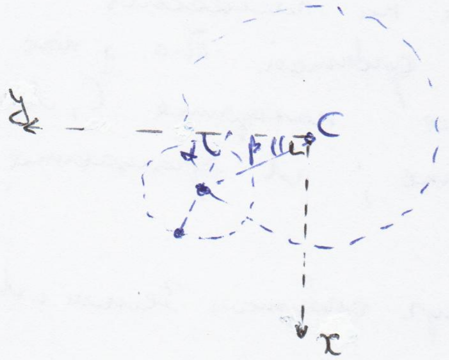
Выразим $n(\tau) = a_\oplus + a_☾ \cdot \cos\varphi = a_\oplus \pm a_☾ \sqrt{1-\sin^2\varphi} =$

$$= a_\oplus \pm a_☾ \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\tau}{a_☾}\right)^2}$$

Для выпуклости наружу необходимо, чтобы $n''_\tau(\tau) \le 0$

$$n'_\tau(\tau) = \left(a_\oplus \pm a_☾ \sqrt{1-\left(\frac{\tau}{a_☾}\right)^2}\right)' = \pm a_☾ \cdot \frac{(-2)\frac{\tau}{a_☾}\cdot\frac{1}{a_☾}}{2\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{a_☾}\right)^2}} =$$

$$= \mp \frac{\frac{\tau}{a_☾}}{\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{a_☾}\right)^2}} = \mp \frac{\tau}{\sqrt{a_☾^2-\tau^2}}$$



$$y = a_\oplus \cos\beta + a_☾ \cdot \cos\alpha = a_\oplus \cos(\omega_\oplus t) + a_☾ \cos(\omega_☾ t)$$

$$x = a_\oplus \sin\beta + a_☾ \cdot \sin\alpha = a_\oplus \sin(\omega_\oplus t) + a_☾ \sin(\omega_☾ t)$$

$\beta = \omega_\oplus \cdot t$

$\alpha = \omega_☾ \cdot t$, где $\omega_\oplus = \frac{2\pi}{T_\oplus}$, $\omega_☾ = \frac{2\pi}{T_☾}$, t — время от противостояния Луны

$\cancel{x = a_\oplus \cos(\omega_\oplus t) + a_☾ \cos(\omega_☾ t)}$

$\cancel{y = a_\oplus \sin(\omega_\oplus t) + a_☾ \sin(\omega_☾ t)}$

$\cancel{(x - a_\oplus \sin\beta)^2 = a_☾^2 \sin^2\alpha \Rightarrow (x - a_\oplus \sin\beta)^2 + (y - a_\oplus \cos\beta)^2 = a_☾^2}$

$\cancel{(y - a_\oplus \cos\beta)^2 = a_☾^2 \cos^2\alpha}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\oplus \omega_\oplus \cos(\omega_\oplus t) + a_☾ \omega_☾ \cos(\omega_☾ t) \\ -a_\oplus \omega_\oplus \sin(\omega_\oplus t) - a_☾ \omega_☾ \sin(\omega_☾ t) \end{pmatrix}$$

Продолж. на след. листе

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_\oplus \omega_\oplus^2 \sin(\omega_\oplus t) - a_☾ \omega_☾^2 \sin(\omega_☾ t) \\ -a_\oplus \omega_\oplus^2 \cos(\omega_\oplus t) - a_☾ \omega_☾^2 \cos(\omega_☾ t) \end{pmatrix}$$

Скалярно умножим: $(\vec{r}, \vec{a}) = \big(a_\oplus \sin(\omega_\oplus t) + a_☾ \sin(\omega_☾ t)\big) \cdot$

$\cdot \Big(-\big(a_\oplus \omega_\oplus^2 \sin(\omega_\oplus t) + a_☾ \omega_☾^2 \sin(\omega_☾ t)\big)\Big) +$

$+ \big(a_\oplus \cos(\omega_\oplus t) + a_☾ \cos(\omega_☾ t)\big)\Big(-\big(a_\oplus \omega_\oplus^2 \cos(\omega_\oplus t) + a_☾ \omega_☾^2 \cos(\omega_☾ t)\big)\Big) =$

$= -\Big(\underline{a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 \sin^2(\omega_\oplus t)} \; \underline{+ a_☾^2 \omega_☾^2 \sin^2(\omega_☾ t)} +$

$+ a_\oplus a_☾ \omega_☾^2 \big(\sin(\omega_\oplus t) + \sin(\omega_☾ t)\big) + a_☾ a_\oplus \omega_\oplus^2 \big(\sin(\omega_☾ t) + \sin(\omega_\oplus t)\big) +$

$+ \underline{a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 \cos^2(\omega_\oplus t)} + \underline{a_☾^2 \omega_☾^2 \cos^2(\omega_☾ t)} +$

$+ a_\oplus a_☾ \omega_☾^2 \big(\cos(\omega_\oplus t) + \cos(\omega_☾ t)\big) + a_☾ a_\oplus \omega_\oplus^2 \big(\cos(\omega_☾ t) + \cos(\omega_\oplus t)\big)\Big) =$

$= -\Big(a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 + a_☾^2 \omega_☾^2 + a_\oplus a_☾ (\omega_☾^2 + \omega_\oplus^2)\big(\sin(\omega_\oplus t) + \sin(\omega_☾ t)\big) +$

$+ a_\oplus a_☾ (\omega_☾^2 + \omega_\oplus^2)\big(\cos(\omega_\oplus t) + \cos(\omega_☾ t)\big)\Big) =$

$= -\Big(a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 + a_☾^2 \omega_☾^2 + a_\oplus a_☾ (\omega_☾^2 + \omega_\oplus^2)\big(\sin(\omega_\oplus t) + \sin(\omega_☾ t) +$

$+ \cos(\omega_\oplus t) + \cos(\omega_☾ t)\big)\Big)$

$$2\sqrt{2} \geq \underbrace{\sin(\omega_\oplus t) + \cos(\omega_\oplus t) + \sin(\omega_☾ t) + \cos(\omega_☾ t)}_{\shortparallel\ \Sigma} \geq -2\sqrt{2}$$

при $\Sigma = -2\sqrt{2}$:

$(\vec{r}, \vec{a}) = -\big(a_\oplus^2 \omega_\oplus^2 + a_☾^2 \omega_☾^2 + a_\oplus a_☾ (\omega_☾^2 + \omega_\oplus^2)(-2\sqrt{2})\big) =$

$= -\Big((1{,}5 \cdot 10^8)^2 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^7}\right)^2 + (3{,}8 \cdot 10^5)^2 \cdot \left(\frac{1}{2{,}3 \cdot 10^6}\right)^2 +$

$+ 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 3{,}8 \cdot 10^5 \left(\left(\frac{1}{3 \cdot 10^7}\right)^2 + \left(\frac{1}{2{,}3 \cdot 10^6}\right)^2\right)(-2\sqrt{2})\Big) \approx -10^2 < 0$

Продолж. на обороте

т.о. $(\vec{a}, \vec{v}) < 0$ всегда $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ центр кривизны траектории в данной точке всегда находится в направлении „внутренности" траектории $\Rightarrow$ траектория выпукла наружу.

<u>чтд</u>

<u>Задача № 2</u>

ск-ть звука $\quad v = \sqrt{\dfrac{\gamma R_2 T}{M}}$

$\nu = \dfrac{v}{2R} \Rightarrow D = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 3}{0{,}001}}}{2500} = \boxed{2\ м}$