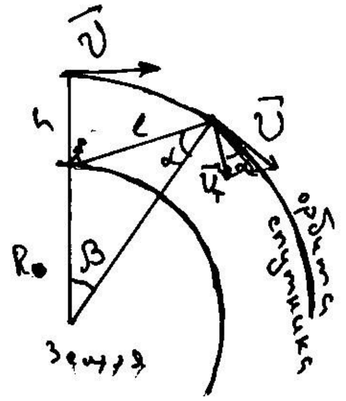
Лист 1 Бел-3, 11 кл

Задача № 1



Максимальная скорость спутника достигается в зените и равна $\omega_{max} = \frac{v}{h}$, где h - высота орбиты, а v - скорость спутника.

$\frac{\omega_{max}}{2} = \frac{v_r}{\ell}$ - крайний случай, когда угловая скорость становится равна половине максимальной.

$$\frac{v}{2h} = \frac{v\cos\alpha}{\ell}; \quad \cos\alpha = \frac{\ell}{2h} \quad (1)$$

По теореме косинусов для треугольника центр Земли - наблюдатель - спутник:

$$R_⊕^2 = \ell^2 + (R_⊕+h)^2 - 2\ell(R_⊕+h)\cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{(R_⊕+h)^2 - R_⊕^2 + \ell^2}{2\ell(R_⊕+h)} =$$
$$= \frac{\ell^2+h^2+2R_⊕ h}{2\ell(R_⊕+h)} \quad (2)$$

Из (1) и (2): $\frac{\ell^2+h^2+2R_⊕h}{2\ell(R_⊕+h)} = \frac{\ell}{2h}$

$$\ell^2(R_⊕+h) = h(\ell^2+h^2+2R_⊕h)$$
$$\ell^2 = \frac{h^3}{R_⊕} + 2h^2 \approx 300 \text{ км}$$

По теореме косинусов для всё того же треугольника:

$$\ell^2 = R_⊕^2 + (R_⊕+h)^2 - 2R_⊕(R_⊕+h)\cos\beta$$
$$\beta = \arccos\frac{R_⊕^2+(R_⊕+h)^2-\ell^2}{2R_⊕(R_⊕+h)} \approx 3^\circ$$

Т.к. у меня отсутствует калькулятор, значительно проще определить угол β просто построив треугольник с подобными сторонами и измерить угол транспортиром.

Согласно III закону Кеплера:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$, где T - период спутника; a - полуось орбиты спутника, равная $R_⊕+h$; M - масса Земли.

$T = 4674$ с

Время, в течении которого угловая ~~часть~~ скорость спутника больше половины максимальной - это время за которое он проходит угол β слева и справа от зенита, а значит суммарно за это время спутник проходит 2β.

см. продолжение на листе 2

$t = \frac{2\beta}{360^\circ} \cdot T \approx 78c = 1^m 18^s$

Ответ: $1^m 18^s$.

Задача №2

Если Мессье определил все возможные для своего телескопа галактики, а за эталон современного телескопа мы возьмём телескопы обсерватории имени Кека с диаметром объектива около $D_c = 10$ м, то:

$\beta = \frac{1,22\lambda}{D}$ – разрешающая способность телескопа Мессье ($D = 0,06$ м)

$\beta_c = \frac{1,22\lambda}{D_c}$ – разрешающая способность современных телескопов.

Если предположить, что среднее расстояние между звездами во всех галактиках одинаково, а сами галактики распределены во вселенной равномерно, то

$D = \frac{R}{\beta}$ – расстояние на котором Мессье мог увидеть галактику

$D_c = \frac{R}{\beta_c}$ – расстояние на котором современные телескопы могут увидеть галактику.

Тогда отношение числа видимых галактик для Мессье к современному числу

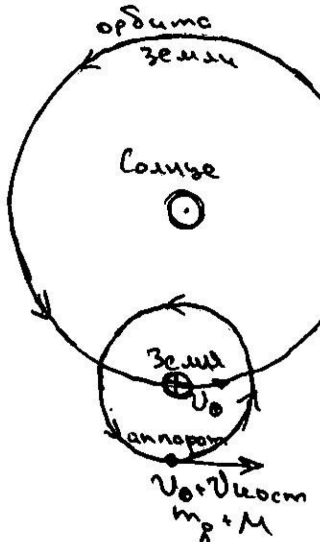
$$\frac{N}{N_c} = \left(\frac{D}{D_c}\right)^3 = \left(\frac{R\,\beta_c}{\beta\,R}\right)^3 = \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{D}{D_c}\right)^3 = 2,2 \cdot 10^{-7}$$

$$N_c = \frac{N}{2,2\cdot 10^{-7}} = \frac{28}{2,2 \cdot 10^{-7}} \approx 1,3 \cdot 10^8 \text{ галактик.}$$

Ответ: $1,3 \cdot 10^8$

Задача №5

Расчитаем, какую максимальную гелиоцентрическую скорость сможет набрать аппарат. В идеальных условиях еще до включения двигателей он будет иметь скорость $V_\oplus + V_{геост}$, где $V_\oplus$ - орбитальная скорость Земли, а $V_{геост}$ - орбитальная скорость спутника на орбите вокруг Земли. Это произойдет в случае, изображенном на чертеже.



Удельный импульс двигателя $p_0 = 4500\ м/с = 4,5\ км/с$

При сгорании топлива массой dm аппарат получает импульс dmp_0, а значит прибавку к скорости в

$$dV = \frac{dm\,p_0}{m - dm}; \quad m - dm \approx m; \quad dV = \frac{dm\,p_0}{m}$$

Полученная аппаратом скорость равна:

$$V_n = \int_{m_0}^{m_0+M} dV = \int_{m_0}^{m_0+M} \frac{dm\,p_0}{m},$$

где m_0 - масса аппарата без топлива, а M - масса топлива.

$$V_n = \int_{m_0}^{m_0+M} \frac{dm\,p_0}{m} = p_0 \int_{m_0}^{m_0+M} \frac{1}{m}\,dm = p_0 \left(\ln m \Big|_{m_0}^{m_0+M} \right) =$$

$$= p_0 \left(\ln(m_0+M) - \ln m_0 \right) = p_0 \ln \frac{m_0+M}{m_0} = 4,5\ км/с \cdot \ln \frac{1т+6,4т}{1т}$$

$$= 9\ км/с$$

Тогда итоговая скорость:

$$V_\Sigma = V_\oplus + V_{геост} + V_n = 41,8\ км/с \quad (V_\oplus = 29,8\ км/с;\ V_{геост} \approx 3\ км/с)$$

Вторая космическая скорость для Солнца на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли: $V_{II} = \sqrt{2}\, V_\oplus = 41,7\ км/с$.

Получается в таком случае аппарат как раз набирает вторую космическую скорость и покидает Солнечную систему по параболической орбите.

Ответ: сможет.

Задача № 4

Известно, что средняя температура межзвёздного пространства равна $T \approx 3K$.

Будем считать что каждая точка галактики испускает в сферу радиусом r вокруг себя фотоны с концентрацией $n = 20T^3 = \frac{3N}{4\pi r^3}$, где N – число фотонов в такой сфере.

$N = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 20 T^3$

Всего таких сфер во всем объеме галактики

$K = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}$, где R – радиус галактики: $R \approx 20$ кпк

Всего фотонов в галактике:

$N_г = kN = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 20 T^3 = 5 \cdot 10^{62}$ (R в см)

Ответ: ~~$5 \cdot 10^{68}$~~ $5 \cdot 10^{62}$

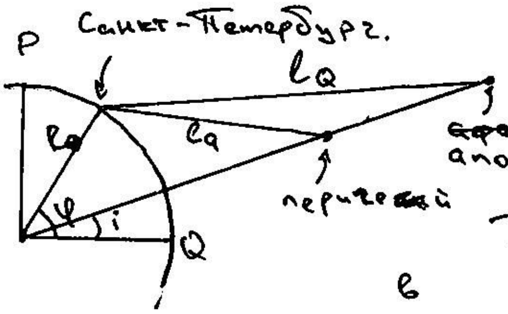
Задача № 3

С помощью III закона Кеплера определим полуось орбиты спутника:

$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 8500$ км

$q = a(1-e) = 7000$ км – перигейное расстояние

$Q = a(1+e) = 10000$ км – афелийное расстояние.



По теореме косинусов:

$l_q = \sqrt{R_\oplus^2 + q^2 - 2R_\oplus q \cos(\varphi - i)} = 3300$ км,

где $\varphi = 60°$ – широта Санкт-Петербурга

~~афелий~~ апогей $l_Q = \sqrt{R_\oplus^2 + Q^2 - 2R_\oplus Q \cos(\varphi - i)} = 3830$ км

Т.к. согласно нашим расчетам в перигее спутник ближе, значит ярче. Определим на сколько.

По формуле Погсона:

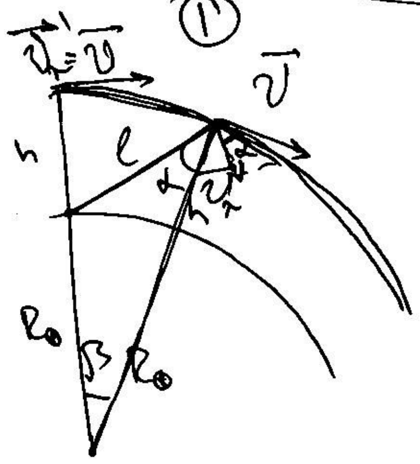
$\Delta m = 2{,}5 \lg\left(\frac{l_Q}{l_q}\right)^2 = 5 \lg \frac{l_Q}{l_q} \approx 1^m$

Ответ: в перигее ярче на 1^m.

Черновик лист 1

Бел-3, 1

1



$\omega_{max} = \frac{v}{h}$

$\frac{\omega_{max}}{2} = \frac{v}{2h}$

$\frac{v}{2h} = \frac{v_r}{l} = \frac{v\cos\alpha}{l}$

$\cos\alpha = \frac{l}{2h}$

$R_\oplus^2 = l^2 + (R_\oplus + h)^2 - 2l(R_\oplus + h)\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{(R_\oplus+h)^2 + l^2 - R_\oplus^2}{2l(R_\oplus+h)} = \frac{l^2 + h^2 + 2R_\oplus h}{2l(R_\oplus+h)} = \frac{l}{2h}$

$l^2(R_\oplus + h) = l^2 h + h^3 + 2R_\oplus h^2$

$l^2 R_\oplus + \cancel{l^2 h} = \cancel{l^2 h} + h^3 + 2R_\oplus h^2$

$l^2 = \frac{h^3}{R_\oplus} + 2h^2 = \frac{8000000\ км^3}{6400\ км} + 2 \cdot 40000\ км^2 =$

$= 1094 + 80000 = 81000$; $l = \sqrt{81000} = 9 \cdot 10\sqrt{10} = 90\sqrt{10} \approx 300$ км

$l^2 = R_\oplus^2 + (R_\oplus+h)^2 - 2R_\oplus(R_\oplus+h)\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{R_\oplus^2 + (R_\oplus+h)^2 - l^2}{2R_\oplus(R+h)} = \frac{40960000 + 43560000 - 90000}{2 \cdot 42240000}$

$= \frac{8443}{8448}$, кр7. $\beta \approx 3°$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{262 \cdot 10^{18}}{40 \cdot 10^{24-11}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}6 \cdot 10^{20}}{4 \cdot 10^{14}}} = 2\pi\sqrt{6 \cdot 10^5} = 100\sqrt{60} \cdot 2\pi = 770 \cdot 2\pi$

$(1400 + 140) \cdot \pi = 1540 \cdot \pi = 4674$ с

$6{,}4 \cdot 10^6$

$t = \frac{2 \cdot 3}{360} \cdot 4674\ с = \frac{4674}{60} = \frac{467{,}4}{6} \approx 78$ с

$\boxed{\text{Ответ: } 1^m 18^s}$

66 × 66 = 4356; 64 × 64 = 4096; 64 × 7 = 448; 64 × 9 = 576; 64 × 4 = 256; 10000 : 64 = 1094; 7,6 × 7,6 = 57,76; 3,1² = 961; 3,2² = 10,24; 40,96 × 6,4 = 262144; 4356 + 4096 = 8452; 154 × 31 = 4674; 8443 : 8448 = 0,99; 8448 × 9 = 76032; 84430 − 76032 = 8398; 467,4 : 6 = 78

Черновик   Лист 2   Бел-3   11 кл:

(2) $\beta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{1{,}22\cdot 550\cdot10^{-9}\,м}{0{,}06\,м} =$

$6^3 =$

$\beta_c = \frac{1{,}22\lambda}{D_c}$

$36\cdot 6 = 216$ $\frac{6}{1000} = 6\cdot10^{-3}$

$\beta = \frac{R}{D}$; $D = \frac{R}{\beta}$

$\frac{N}{N_c} = \left(\frac{D}{D_c}\right)^3 = \left(\frac{\cancel{R}\cdot\beta_c}{\beta\cdot\cancel{R}}\right)^3 = \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{D}{D_c}\right)^3 = \left(\frac{0{,}06\,м}{10\,м}\right)^3 = 216\cdot10^{-9} = 2{,}2\cdot10^{-7}$

$N_c = \frac{N}{2{,}2\cdot10^{-7}} = \frac{28}{2{,}2\cdot10^{-7}} = \frac{28}{22\cdot10^{-8}} = \frac{14}{11}\cdot10^{8}$ $1{,}3\cdot10^{8}$ галактик

---

(5) $\frac{P_g}{m} = $ $V_g = 4500\,м/с$

$dm\,V_g = (m-dm)\,dV$ $m - dm \approx m$

$dV = \frac{dm}{m}V_g$

$2{,}71\cdot2{,}71$: 271, 1897, 541, $7{,}3341 \approx 7{,}4$ $5{,}3\cdot2{,}7$ $29{,}8\cdot1{,}4$: 1192, 298, $41{,}72$

$V_n = \int_{m_0}^{M}\frac{dm}{m}V_g = V_g\left(\ln m\Big|_{m_0}^{M}\right) = V_g\ln\frac{M}{m_0} = V_g\ln\frac{6{,}4+1}{1} =$

$= V_g\ln 7{,}4 = 2V_g = 9\,км/с$

$V_\Sigma = V_\oplus + V_{геост.} + V_n = 29{,}8\,км/с + 3\,км/с + 9\,км/с = 41{,}8\,км/с$

$V_{II} = \sqrt{2}\,V_\oplus = 1{,}4\cdot29{,}8 = 41{,}7\,км/с$

$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot42000\,км}{86400\,с} = 3\,км/с$

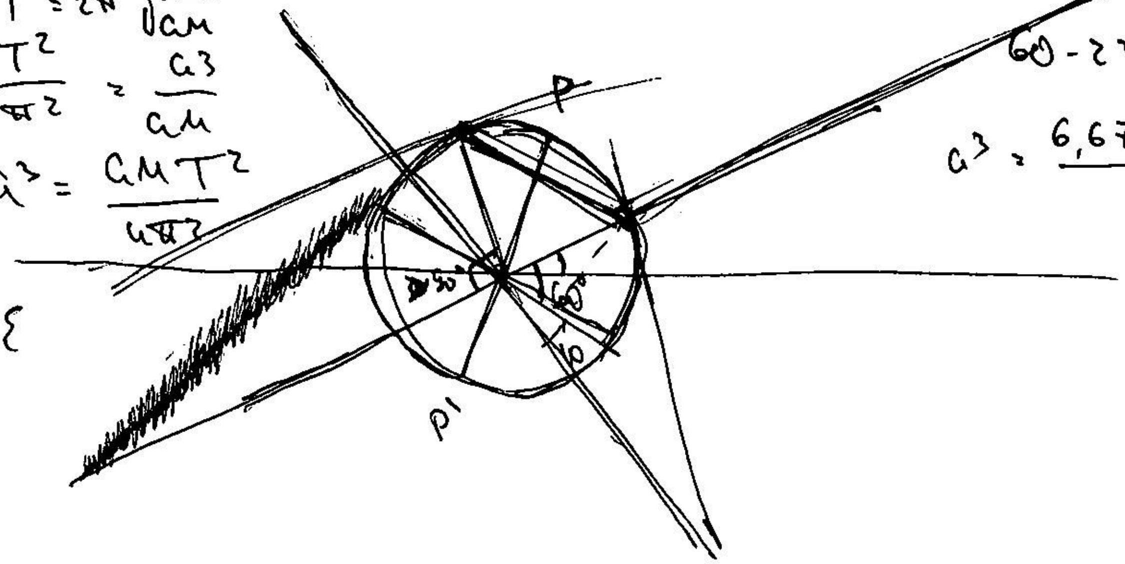
$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$

$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM}$

$a^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$

$60 - 23{,}5 = 36{,}5$ $8\cdot10^{3}$, $64\cdot10^{6}$

$a^3 = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\,(8040с)^2}{4\cdot3{,}14^2}$



Черновик Лист 3 Бел-3, 11к

$134 \cdot 60 = 8040$

$6{,}7 \cdot 6 = 40{,}2$

$3{,}14 \cdot 3{,}14$: 1256, 314, 942, $9{,}8596 \approx 10$

$6{,}67 \cdot 6$

$$a^3 = \frac{\cancel{40{,}2} \cdot 10^{13} \cdot 64 \cdot 10^6}{\cancel{40}} = 64 \cdot 10^{19} = 640 \cdot 10^{18}$$

$$a = \sqrt[3]{640 \cdot 10^{18}} = \sqrt[3]{640} \cdot 10^6 = 8{,}5 \cdot 10^6 \text{ м} = 8500 \text{ км}$$

$8^3 = 64 \cdot 8 = 512$ $\quad 8{,}5^3 =$ $8{,}5 \cdot 8{,}5$: 425, 680, 72,25 $\quad 72 \cdot 8{,}5$: 360, 576, 612,0

$9^3 = 81 \cdot 9 = 729$

$$q = a(1-e) = 8500 \cdot 0{,}826 =$$

$826 \cdot 8{,}5$: 4130, 6608, $7021{,}0 = 7000$ км

$9{,}3 \cdot 9{,}3$: 279, 837, 86,49 $\quad 9{,}4 \cdot 9{,}4$: 376, 846, 88,36 $\quad 9{,}5 \cdot 9{,}5$: 475, 855, 90,25

$$Q = a \cdot (1+e) = 8500 \cdot 1{,}184 = 10000 \text{ км}$$

$1{,}89 \cdot 8{,}5$

$$l_n = \sqrt{7000^2 + 6400^2} = \sqrt{49 \cdot 10^6 + 41 \cdot 10^6} = \sqrt{90 \cdot 10^6} = 9500$$

$$N = \frac{4}{3}\pi h^3 \cdot 20 T^3$$

$$\frac{N}{\frac{4}{3}\pi h^3} = 20T^3$$

$$n = \frac{N}{V} = 20T^3$$

$$V = 4\pi R^2 \cdot h$$

$$\frac{N}{4\pi R^2 h} = 20T^3$$

$200000 \cdot 206265 \cdot 150 \cdot 10^6$ км

$2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8$ км $= 6 \cdot 10^{17}$ км

$T \approx 3$ K

$R \approx 20$ кпк

$$K = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi h^3}$$

$$N_\Sigma = K N = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3 \cdot 20T^3$$

$$N_\Sigma = \left(\frac{4}{3}\right)\pi (6 \cdot 10^{17})^3 \cdot 20 \cdot 27 =$$

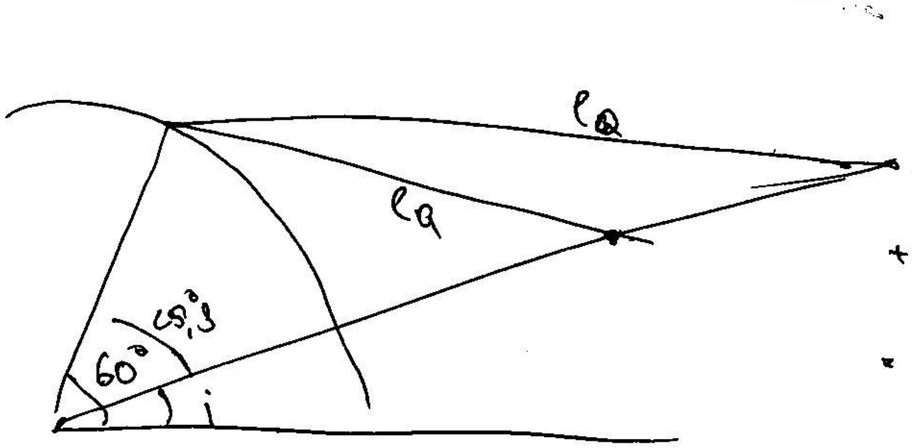
$36 \cdot 6 = 216$, $216 \cdot 216$: 1296, 216, 432

$27 \cdot 120 = 540$, $540 \cdot 4 = 2160$

$4 \cdot \pi \cdot 216 \cdot 10^{51} \cdot 20 \cdot 27 = $

$216 \cdot 216 \cdot 10^{52} \cdot$ ... $= 56$ ...

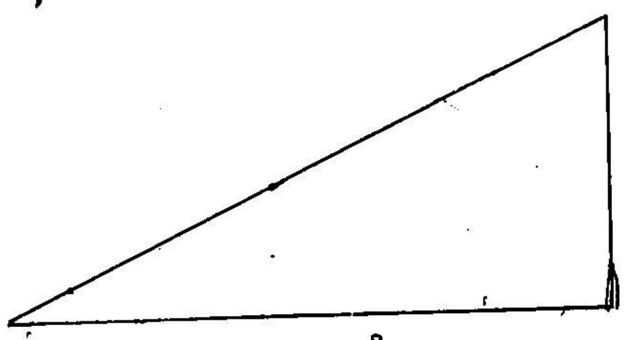
Черновик лист 4 Бел-3 11 кл.



$6{,}4 \times 6{,}4 = 256$, 384

$40960000 + 49000000 = 89960000 = 9 \cdot 10^7$

$$l_q^2 = 6400^2 + 7000^2 - 2 \cdot 6400 \cdot 7000 \cdot \cos 25{,}8^\circ =$$



$6400 \times 7000 = 44800000$, $\times 2$ — 89600000

$9 \cdot 10^7 =$

$\cos 25{,}8 \approx \frac{8}{9}$

$$l_q^2 = 10^7$$

$$l_q = \sqrt{10} \cdot 10^3 = 3300 \text{ км}$$

$$l_Q^2 = 6400^2 + 10000^2 - 2 \cdot 6400 \cdot 10000 \cdot \cos 25{,}8^\circ =$$

$$= 40960000 + 10^8 - 12800 \cdot 10^4 \cdot \frac{8}{9} =$$

$383 : 330 = 1{,}2$

$$= 4 \cdot 10^7 + 10^8 - 1{,}3 \cdot 10^8 \cdot \frac{8}{9} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 10^8 - 1{,}3 \cdot 10^8 \cdot \frac{8}{9} = 1{,}4 \cdot 10^8 - 1{,}15 \cdot 10^8 =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^7 =$$

$$= \sqrt{2{,}5} \cdot 3300 \text{ км} =$$

$$= 1{,}16 \cdot 3300 \text{ км} =$$

$$= 3830 \text{ км}$$

$1{,}3 \times 8 = 10{,}4$; $10{,}4 : 9 = 1{,}15$; -9, 14, -9, 50

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}16$$

$1{,}16 \times 33 = 348$, 348, $38{,}28$

$$\Delta m = 2{,}5 \lg \frac{3830 \text{ км}}{3300 \text{ км}} \approx 1^m$$