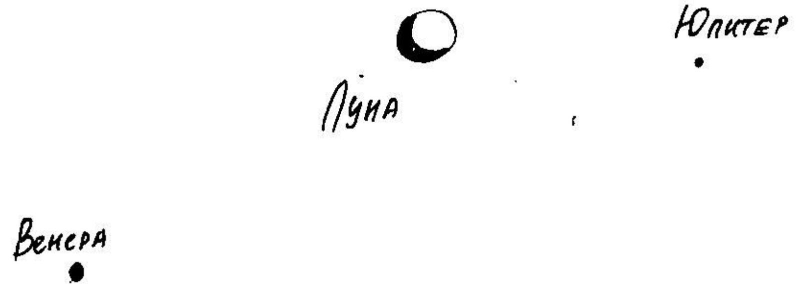
БЕЛ-5
10кл

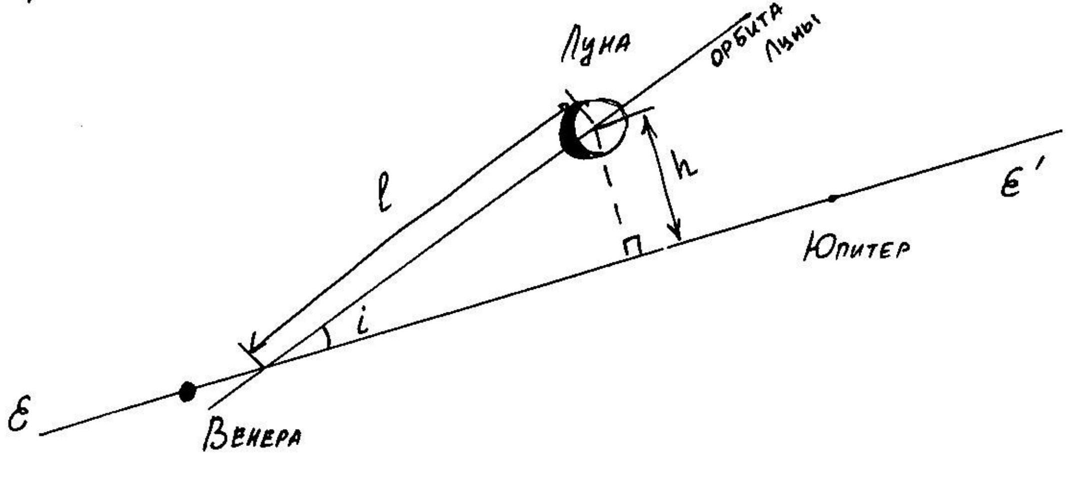
Лист 1

Глядя на представленные фотографии, мы видим, что Луна освещена с левой стороны. Из этого следует, что Солнце также находится слева. Также, на фотографиях видно, что объект, который находится слева, ярче (а следовательно больше в угловом размере), чем объект справа. Из всех этих высказываний следует, что справа находится Юпитер, а слева – Венера* (логично, что в центре находится Луна, т.к. её угловые размеры гораздо больше данных небесных тел). Тогда фотографии имеют вид:

* Из курса астрономии мы знаем, что Венера - самая яркая планета на ночном небе Земли. Так же она ближе к Солнцу, чем Юпитер.



Определим время, прошедшее между снимками. Для этого на каждой фотографии соединим линией (с помощью линейки и карандаша) Юпитер и Венеру. Затем на данную прямую опустим перпендикуляр из центра Луны. Так как все планеты движутся в плоскости эклиптики (по условию задачи), то данная прямая, соединяющая Венеру и Юпитер, является эклиптикой. Мы знаем, что угол наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики равно $i=5^\circ$.



На данном рисунке орбита Луны расположена символически, для представления общей картины происходящего.

Лист 2

БЕЛ-5
10 кл

На обоих фотографиях измерим с помощью линейки размер Луны и расстояние от центра Луны до эклиптики (h) и составим пропорции. Мы знаем, что угловой размер Луны равен $32'$.

Для верхней фотографии:

$$\begin{matrix} 8mm = 32' \\ 14mm = h_1 \end{matrix} \Rightarrow h_1 = \frac{14mm \cdot 32'}{8mm} = 14 \cdot 4' = 56'$$

Для нижней фотографии:

$$\begin{matrix} 12mm = 32' \\ 27mm = h_2 \end{matrix} \Rightarrow h_2 = \frac{27mm \cdot 32'}{12mm} = 72'$$

Найдем расстояние, пройденное Луной от точки пересечения с эклиптикой до нынешнего положения (l):

Для верхней фотографии:

$$\sin i = \frac{h_1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{h_1}{\sin i}$$

Для нижней фотографии:

$$\sin i = \frac{h_2}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{h_2}{\sin i}$$

Найдем, какое расстояние прошла Луна между снимками (Δl):

$$\Delta l = l_2 - l_1$$

$$\Delta l = \frac{h_2}{\sin i} - \frac{h_1}{\sin i} = \frac{h_2 - h_1}{\sin i}$$

Так как i - малый угол, то $\sin i = i = \frac{5^\circ}{57{,}3^\circ/рад} \approx \frac{5}{55} рад = \frac{1}{11} рад = 0{,}09 рад$

$$\Delta l = \frac{h_2 - h_1}{i} = \frac{72' - 56'}{0{,}09} = \frac{16'}{0{,}09} = \frac{1600'}{9} = \frac{1600^\circ}{9 \cdot 60} = \frac{80^\circ}{27} \approx 3^\circ$$

Угловая скорость Луны (ω) равна:

$$\omega = \frac{360^\circ}{T}, \text{ где } T = 27{,}32^d$$

Тогда искомое время Δt:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{\omega} = \frac{\Delta l \cdot 27{,}32^d}{360^\circ} = \frac{3^\circ \cdot 27{,}32^d}{360^\circ} = \frac{27{,}32^d}{120} \approx \frac{27^d}{120} = \frac{9^d}{40} = 0{,}225^d = 5{,}4^h =$$

$$= 5^h 24^m$$

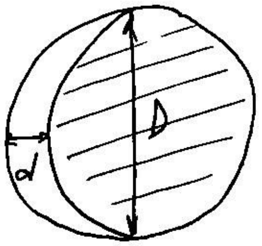
Лист 3

БЕЛ-5

10кл

Найдем фазу Луны.

Для этого с помощью линейки найдем размер освещенной части Луны и диаметр Луны.



Φ (фаза Луны) $= \frac{d}{D}$

$d = 2mm$
$D = 8mm$ (из верхней фотографии)

$\Phi = \frac{2mm}{8mm} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Найдем фазовый угол φ:

$\Phi = \frac{1-\cos\varphi}{2} \Rightarrow 2\Phi = 1-\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1-2\Phi$

$\cos\varphi = 1-2\cdot\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$

Это означает, что Луна находится в 60° от Солнца.

Мы знаем, что 31 января Солнце в Козероге. Если Луна на 60° правее Солнца, то нужно вернуться на $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ года раньше, т.е на 2 месяца раньше. 2 месяца назад было ≈ 31 ноября. В это время Солнце находилось в созвездии Змееносец. Следовательно, 31 января Луна была в созвездии Змееносца.

Найдем расстояние до планет в момент события.

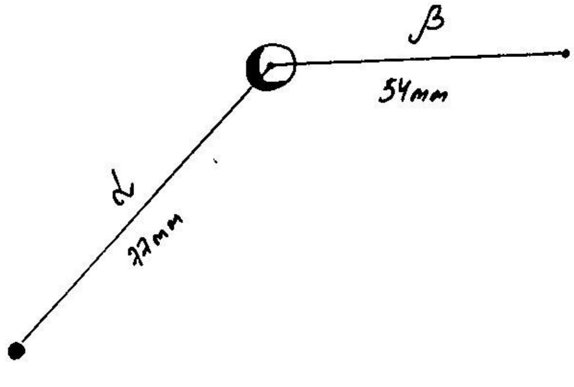
Измерим линейкой расстояние от центра Луны до каждой из планет.

Из верхней фотографии:

$8mm = 32'$

$77mm = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{77mm\cdot 32'}{8mm} = 308' \approx 5°$

$54mm = \beta \Rightarrow \beta = \frac{54mm\cdot 32'}{8mm} = 216' \approx 3{,}6°$

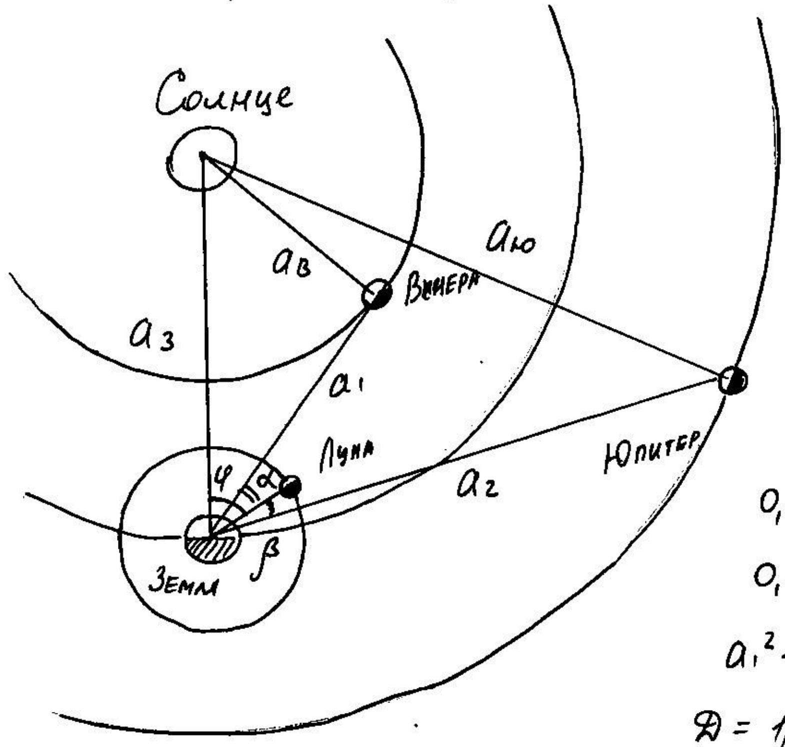


Лист 4

Бел-5

10кл

Рассмотрим ситуацию сверху:



Найдем расстояние до Венеры (a_1). По теореме косинусов:

$a_в^2 = a_з^2 + a_1^2 - 2a_з a_1 \cdot \cos(\varphi - \alpha)$

$a_в = 0{,}72$ а.е.

$a_\oplus = 1$ а.е.

$\varphi - \alpha = 60° - 5° = 55°$

$0{,}72^2 = 1^2 + a_1^2 - 2 \cdot 1 \cdot a_1 \cdot \cos(55°)$

$0{,}52 = 1 + a_1^2 - 2 \cdot 0{,}55 \cdot a_1$

$a_1^2 - 1{,}1a_1 + 0{,}48 = 0$

$D = 1{,}1^2 - 4 \cdot 0{,}48 \approx 0$

$a_1 = \frac{1{,}1}{2} = 0{,}55$ а.е.

Найдем расстояние до Юпитера (a_2). По теореме косинусов:

$a_{ю}^2 = a_з^2 + a_2^2 - 2 \cdot a_з \cdot a_2 \cos(\varphi + \beta)$

$a_{ю} = 5{,}2$ а.е.

$a_з = 1$ а.е.

$\varphi + \beta = 60° + 3{,}6° = 63{,}°6$

$5{,}2^2 = 1^2 + a_2^2 - 2 \cdot 1 \cdot a_2 \cos(63{,}°6)$

$27 = 1 + a_2^2 - 2 \cdot 0{,}45\, a_2$

$26 = a_2^2 - 0{,}9a_2 \Rightarrow a_2^2 - 0{,}9a_2 - 26 = 0$

$D = 0{,}81 + 4 \cdot 26 = 104{,}81$; $\sqrt{D} \approx 10$

$a_2 = \frac{0{,}9 + 10}{2} = \frac{10{,}9}{2} = 5{,}45$ а.е.

$a_2 = \frac{0{,}9 - 10}{2} = -\frac{9{,}1}{2} = -4{,}55$ (не подходит, т.к. < 0)

Лист 5

БЕЛ-5
10кл

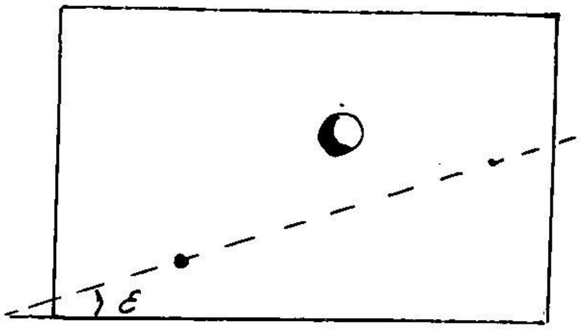
Найдем расстояние между точками на Земле.

Т.к. азимуты центров фотографий в обоих точках были примерно одинаковы (по условию задачи) => фотографии были сделаны в одно и то же время. Мы знаем, что в таком случае разница времен (Δt) равна разнице долгот ($\Delta\lambda$):

$\Delta t = \Delta\lambda = 5^h 24^m$ (как мы нашли раннее)

$\Delta\lambda = 5^h 24^m \cdot 15°/h = 5{,}4 \cdot 1{,}5° = 81°$

Измерим наклон эклиптики к горизонту. Для этого продлим линию эклиптики до пересечения с нижней частью фотографии.



Для верхней фотографии:

$\varepsilon_1 = 17°$

Для нижней фотографии

$\varepsilon_2 = 26°$

Заметим, что: $\Delta\varphi = \Delta\varepsilon$

$\Delta\varphi = \Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 26° - 17° = 9°$

Угловое расстояние между фотографами (δ):

$\delta = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi^2} = \sqrt{(81°)^2 + 9°^2} \approx \sqrt{(81°)^2} = 81°$

Составим пропорцию:

$\frac{2\pi R}{360°} = \frac{L}{\delta} \Rightarrow L = \frac{\delta \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{81° \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 км}{360°} = \frac{81 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 16}{9} км =$

$= 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 16$ км $= 27 \cdot 32 \cdot 10$ км $= 8640$ км

Ответ: 1) слева - Венера, в центре - Луна, справа - Юпитер

2) $\Delta t = 5^h 24^m$

3) Луна находилась в созвездии Змееносца

4) до Венеры $a_1 = 0{,}55$ ае, до Юпитера $a_2 = 5{,}45$ а.е.

5) $L = 8640$ км

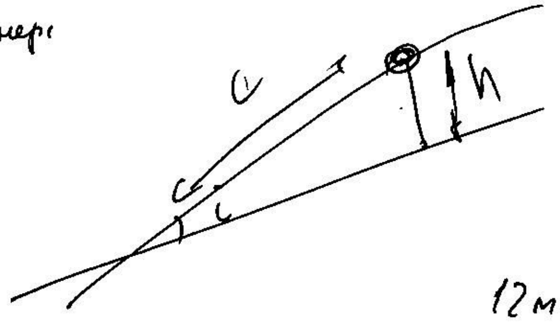
Черновик
Лист 1

Бел-5
10кл

Луна

Солн

Венера



$8мм = 32$

$14 = h_1$

$$h_1 = \frac{14 \cdot 32}{8} = 14 \cdot 4 = 56'$$

$12мм = 32'$

$27мм = h_1$ $\Rightarrow h_2 = \frac{27 \cdot 32}{12} = 9 \cdot 8 = 72'$

$$\Delta l = \frac{\Delta h}{\sin i} = \frac{(72' - 56') 57{,}3}{5} = \frac{16' \cdot 11}{1} =$$

$$\Delta t = \frac{3° \cdot 27{,}32}{360°} = \frac{27{,}32}{120} = \frac{27}{120} = \frac{9}{40} =$$

16
×11
16
16
176 ≈3°

$$= \frac{2{,}25}{10} = 0{,}225^d \cdot 24^h =$$

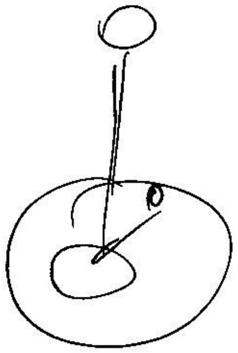
225
×24
900
450
5400

$$\Phi = \frac{1 - \cos\varphi}{2}$$

$2\Phi = 1 - \cos\varphi$

$\cos\varphi = 1 - 2\Phi = 0{,}5$

$\varphi = 60°$

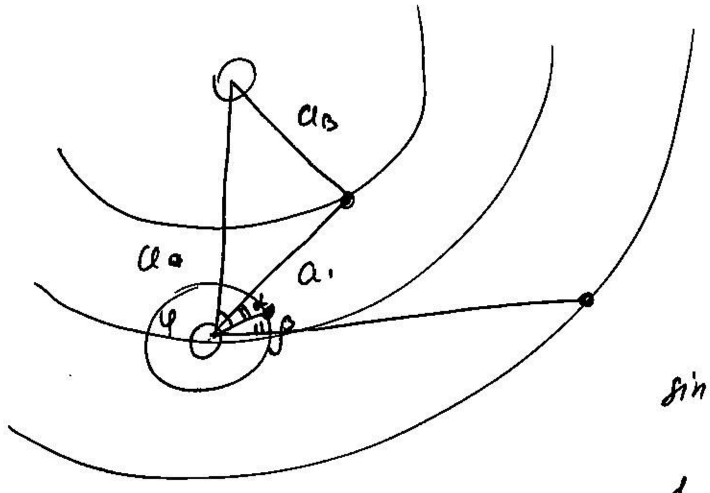


Козерог Стр. Зм. Скорп

2 мес.

Черновик Бел-5

Лист 2 10кл



$$\frac{a_\oplus}{\sin x} = \frac{a_n}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{0{,}72}{\sin(55)}$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}7}{2} = 0{,}85$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{0{,}72}{0{,}85}$$

$0{,}72 \sin x = 0{,}85$

$\sin x = \frac{85}{72}$

$\Delta t = \Delta\lambda$

$\Delta t = 5^h 24^m \cdot 15^\circ/h =$

$= 5{,}4 \cdot 15 = 81^\circ$

$0{,}72 \times 0{,}72$: 144, 504, $0{,}5184$

$a_B^2 = a_\oplus^2 + a_1^2 - 2a_\oplus a_1 \cos 55^\circ$ $\approx 0{,}55$

$0{,}72^2 = 1 + a_1^2 - 2 \cdot 1 \cdot a_1 \cdot 0{,}55$

$0{,}52 = 1 + a_1^2 - 1{,}1 a_1$

$a_1^2 - 1{,}1a_1 - 0{,}48 = 0$

$D = 1{,}21 - 4 \cdot 0{,}48 \approx 0$

$\frac{1{,}1}{2} = 0{,}55 a_\oplus$

$5{,}2 \times 5{,}2$: 104, 260, $27{,}04$

54×15: 270, 54, $81{,}0$

$\cos 63{,}6 \approx 0{,}45$

разные широты $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ разный наклон $\varepsilon\varepsilon'$

$54 + 15$, 270

$\varepsilon_1 = 17^\circ$

$\varepsilon_2 = 26^\circ$

$26 - 17 = 9^\circ$

$\sqrt{81^2 + 9^2} = \sqrt{81^2 + 81} =$

$= \sqrt{81(1+81)} \approx 81^2$

Черновик   Бел-5

Лист 3   10кл

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{L}{5}$$

$$L = \frac{81 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16}{9} = \frac{\cancel{81}^{9} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 10}{\cancel{9}} = 9 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10 = 27 \cdot 32 \cdot 10 =$$

$$= 8640$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 27 \\ \hline 224 \\ 64\ \ \\ \hline 864 \end{array}$$