XXVI Санкт-Петербургска олимпиада
по Астрономия
Теоретичен тур
04-II-2019

1

$$\omega_{max} = \frac{V}{h}$$

$$x^2 = R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi$$

$$\cancel{\frac{\sin\theta}{R} = \frac{\sin\varphi}{x}}$$

$\cancel{\sin\theta =}$ $$\cos\theta = \frac{x^2 + (R+h)^2 - R^2}{2x(R+h)} = \frac{V_\tau}{V}$$

$$\Rightarrow V_\tau = V \cdot \frac{\cancel{R^2} + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi + (R+h)^2 - \cancel{R^2}}{2\sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi}\,(R+h)}$$

$$\omega = \frac{V_\tau}{x} = \frac{\cancel{2}(R+h)^{\cancel{2}} - \cancel{2}R\cancel{(R+h)}\cos\varphi}{\cancel{2}\cancel{(R+h)}(R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi)} \cdot V$$

$$\omega = \frac{R+h - R\cos\varphi}{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi} \cdot V$$

$$R \gg h \Rightarrow \omega \approx \frac{R(1-\cos\varphi) + h}{2R^2(1-\cos\varphi)} V = \frac{V}{2R} + \frac{h}{2R^2(1-\cos\varphi)} \cdot V$$

$$\Rightarrow \frac{V}{2R} + \frac{h}{2R^2(1-\cos\varphi)} V = \frac{1}{2}\frac{V}{h}$$

$$\frac{h}{\cancel{2}R^2(1-\cos\varphi)} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\right) \rightarrow 1 - \cos\varphi = \frac{h}{R^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\right)} = \frac{h}{\frac{R^2}{h} - R}$$

$h = 200\ km = 2 \cdot 10^2\ km$

$R = 6{,}4 \cdot 10^3\ km$

$$1-\cos\varphi = \frac{h}{\frac{R^2}{h}-R} = \frac{2.10^{2}}{\frac{42.10^6}{2.10^2}-6,4.10^3} = \frac{2.10^3}{21.10^4-6,4.10^3} = \frac{2.10^3}{21.10^4} =$$

$$= \frac{1}{11}\cdot 10^{-1} = \frac{1}{110}$$

$1-\cos\varphi = \frac{1}{110}$ $\quad \varphi \ll 1\ \text{rad} \Rightarrow \cos\varphi \approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$

$\frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{110}$ $\quad \varphi^2 = \frac{1}{55}$ $\quad \varphi \approx \frac{1}{7,2}\ \text{rad}$

Периодът T е такъв, че $\frac{(R+h)^3}{T^2} = \frac{R_{☾}^3}{T_{☾}^2}$; $R_{☾}$ – разстояние до луната

$T_{☾}$ – период на луната (сидеричен)

$R_{☾} \approx 385.10^3\ km$

$T_{☾} \approx 27,3d$

$T^2 = \left(\frac{R+h}{R_{☾}}\right)^3 \cdot T_{☾}^2 \longrightarrow T = T_{☾}\left(\frac{R+h}{R_{☾}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$R+h = 6571\ km = 6,6.10^3\ km$

$T = T_{☾}\cdot\left(\frac{6,6.10^3}{885.10^3}\right)^{\frac{3}{2}} \approx (1,8.10^{-2})^{\frac{3}{2}}\cdot T_{☾} = \sqrt{1,8^3}\cdot 10^{-3}\,T_{☾} \approx 3.10^{-3}\,T_{☾}$

$T \approx 3.10^{-3}\,T_{☾}$

Времето t, за което е изпълнено условието, е

$\frac{t}{T} = \frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{\pi} \Rightarrow t = 3.10^{-3}\cdot\frac{1}{55.\pi}\cdot T_{☾} = \frac{10^{-3}}{45}T_{☾}$

$\cancel{= \frac{1}{2}10} \approx \frac{1}{2}10^{-3}d \approx 7,2\,min$

$\Longrightarrow$ Отговорът е около 7 min

2) ~~Нека телескопът ѝ е получавал E_G от най-слабата галактика~~

Нека най-бледата галактика в каталога дава интензитет E_G, а граничният интензитет за окото е E_0, диаметърът на зеницата $d_з \approx 6mm$

$$\frac{E_G \cdot D^2}{E_0 d_з^2} = 1 \quad ; \quad \frac{E_G}{E_0} = 10^{0,4(m_0 - m_T)}$$

, m_T е граничната звездна величина на телескопа

$$\frac{d_з}{D} = 10^{0,2(m_0 - m_T)}$$

$$m_0 - m_T = 5 \log_{10}\left(\frac{d_з}{D}\right) = 5$$

$$m_T = m_0 + 5 = 11^m,5 \; ; \; m_0 = 6^m,5$$ – граничната звездна величина на окото

Нека спиралните галактики да са като Млечния път

$N_* = 250 \cdot 10^9$, $L = L_\odot$

Той е можел да наблюдава на максимално разстояние r_{max}

$$\frac{\frac{N_* \cdot L_\odot}{4\pi r_{max}^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi r_{з-с}^2}} = 10^{0,4(m_\odot - m_T)} = \left(\frac{r_{з-с}}{r_{max}}\right)^2 \cdot N_* = 10^{0,4(-26,7 - 11,5)} = 10^{-0,4 \cdot 39,2}$$

$$\left(\frac{r_{з-с}}{r_{max}}\right)^2 = 10^{-15,7} \cdot \cancel{250 \cdot 10} \cdot \frac{1}{250} \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2,5} \cdot 10^{-26,7} = 4 \cdot 10^{-27,7}$$

$$\left(\frac{r_{max}}{r_{з-с}}\right)^2 = 0,25 \cdot 10^{27,7} = 2,5 \cdot 10^{26,7}$$

$$r_{max} = r_{з-с} \cdot 1,6 \cdot 10^{13,35} = 1,6 \cdot 10^{13,35} AU = \frac{1,6 \cdot 10^{13,35}}{206265} \cdot 3,26 \, ly$$

$$= 8,2 \cdot 10^8 \, ly$$

$r_{max} = r_{3\cdot c} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{13{,}35} \approx 3 \cdot 10^{8}\, ly$

В обем $\frac{4}{3}\pi r_{max}^{3}$ има 28 гал

в сфера с радиус r ще има около $28\left(\frac{r}{r_{max}}\right)^{3}$ галактики

Най-големите телескопи днес имат диаметър

$D_2 = 8m \Rightarrow$ разделителната способност на $\lambda = 650\, nm = 6{,}5 \cdot 10^{-7} m$

е $\delta_{min} = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} \approx 10^{-7}\, rad$

Нека равнината на някоя галактика е перпендикулярна на лъча на зрение и е на разстояние r от нас

Средният ъглов размер между 2 звезди ε е

$$\varepsilon \approx \frac{N_*}{\pi R_G^2}\sqrt{\frac{\pi R_G^2}{N_*}\cdot\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{2}{r} = \frac{R_G}{r}\cdot\frac{2}{\sqrt{N_*}}$$

$R_G = 50 \cdot 10^{3}\, ly$

$\varepsilon = \delta_{min} \to r = r_{max} \Rightarrow \delta_{min} = \frac{R_G}{r_{max}}\cdot\frac{2}{\sqrt{N_*}}$

$\frac{\sqrt{N_*}\,\delta_{min}}{2} = \frac{R_G}{r_{max}} \Rightarrow r_{max} = \frac{R_G 2}{\delta_{min}\sqrt{N_*}} = \cancel{R_G}\ \cancel{50 \cdot 10^{3} \cdot 10^{7} (5 \cdot 10^{5}) = 250 \cdot 10^{15}}$
$\cancel{= 2{,}5 \cdot 10^{17}}\, ly$

$N_* \approx 250 \cdot 10^{9} = 2{,}5 \cdot 10^{10}$

~~$\Rightarrow$ Максималното разстояние, на което земен телескоп би разделил 2 звезди, е $2{,}5 \cdot 10^{17}\, ly$~~

$r_{max} = \frac{5 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{5}}\, ly = 10^{6}\, ly$

В такъв радиус около нас има ~~вер~~ поне една спирална галактика (Андромеда)

Задача 4

$n(r) = n(r_0)\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$

$$N = \int_{r_0}^{r_1} n(r)\cdot 4\pi r^2 dr = n(r_0)\cdot 4\pi r_0^2 \int_{r_0}^{r} dr = n(r_0)\cdot 4\pi r_0^2 (r - r_0) \approx \underline{\underline{4\pi n(r_0) r_0^2 \cdot r}}$$

$N_{Sun} = N_* \cdot 4\pi r_0^2 \cdot \cancel{20^3}\, n_0 \cdot r$

$r \approx \frac{r_{mal}}{2}$ $\quad N_* = 250\cdot10^9$ $\quad r_0 = 700\,000\, km = 7\cdot10^8 m$

$r \approx \cancel{80}\ 25\, ly = 25\cdot365\cdot86400\cdot3\cdot10^8 m \approx 25\cdot86400\cdot10^{14} m$

$= \frac{86400}{4}\cdot10^{13} = 2160\cdot10^{13} m$

$N_{Sun} = N_* \cdot 4\pi\cdot49\cdot10^{16}\cdot2160\cdot10^{13}\cdot n_0[m^{-3}] = N_* 10^{32}\cdot49\pi\cdot\frac{n_0[cm^{-3}]}{10^6} =$

$= 10^{28}\cdot\frac{20\cdot125\cdot10^3}{10^6}\cdot N_*\cdot49\pi = 2{,}5\cdot10^{11}\cdot10^{28}\cdot10^3\cdot20\cdot125\cdot49\pi$

$T \approx 5000 K$

$= 10^{42}\cdot50\cdot125\cdot49\pi \approx 170\cdot125\cdot50\cdot10^{42} = \overbrace{170\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}}^{\sim100}\cdot10^{46}$

$\underline{\underline{N_{ph} \approx 10^{48}}}$

Броят на фотоните е от порядъка на 10^{48}

Задача 5

$$\frac{V_2 - V_1}{u} = \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \quad *$$

$$V_G = \sqrt{\frac{\gamma M_\oplus}{r_G}} \qquad r_G = 42 \cdot 10^3 \text{ km} = 42 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$V_G = \left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{1}{42} \cdot 10^{-6}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{3{,}5} \approx 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$V_{II\oplus} = \sqrt{2}\, V_G$$

$$(\sqrt{2} - 1)\frac{V_G}{u} = \ln\left(\frac{M_0}{M_x}\right)$$

$$(\sqrt{2} - 1)\frac{3{,}3}{4{,}5} = \ln\left(\frac{M_0}{M_x}\right) = \frac{0{,}42 \cdot 3{,}3}{4{,}5} \approx \frac{3{,}3}{10} = 0{,}33$$

$$\boxed{\frac{M_0}{M_x} = e^{0{,}33}}$$

$$(\sqrt{2} - 1)\frac{V_\oplus}{u} = \ln\left(\frac{M_x}{M_{kp}}\right) \qquad V_\oplus = 30 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$V_{II\odot} = \sqrt{2}\, V_\oplus$$

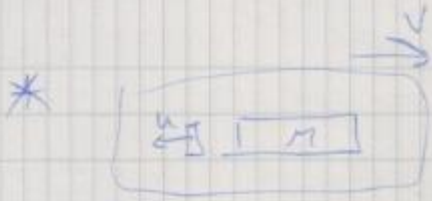
$$(\sqrt{2} - 1)\frac{3 \cdot 10^4}{4{,}5 \cdot 10^3} = \ln\frac{M_x}{M_{kp}}$$

$$\ln\frac{M_x}{M_{kp}} \approx 3 \qquad \frac{M_x}{M_{kp}} \approx e^3$$

$\Rightarrow \frac{M_0}{M_{kp}} \approx e^{3{,}3} > 7{,}4 \Rightarrow$ Не може да излети от слънчевата система

Първо отива далеч от Земята, на същото разстояние от Слънцето като Нея, и после се отдалечава от Слънцето с 2ра космическа $V_{II\odot} = \sqrt{\frac{2\gamma M_\odot}{r_\oplus}}$. Така то би напуснало слънчевата система, ако имаше достатъчно гориво - $\frac{M_{kp} + M_r}{M_{kp}} = 7{,}4 < e^{3{,}3}$, минималното отношение на начална към крайна маса, така че да излети от Слънчевата система

*



$$(M+dM)(v+dV)-dM(v-u)=Mv$$

$$M\,dv+\cancel{dM}v-\cancel{dM}v+dM\,u=0$$

$$M\,dV=-dM\,u \rightarrow -\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{u}=\int_{M_1}^{M_2}\frac{dM}{M} \qquad \frac{V_2-V_1}{u}=\ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$\boxed{\frac{V_2-V_1}{u}=\ln\frac{M_1}{M_2}}\ ;\ u\ 9500\ m/s$$