Задача 1

Максимальная угловая скорость спутника:

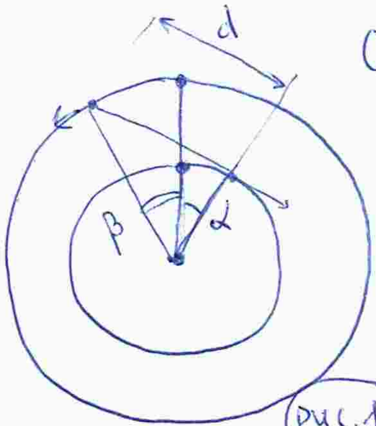

рис. 1

$$\omega_{max} = \frac{V_{сп} + V_{экв}}{h}$$

Через некоторое время t Земля повернётся на угол α, а спутник пройдет угол β:

$$\alpha = \omega_{\oplus} t, \quad \beta = \omega_{сп} t.$$

В этот момент угловая скорость спутника в небе Земли:

$$\omega_{сп} = \frac{V_{отн}}{d}, \quad V_{отн}^2 = V_{экв}^2 + V_{сп}^2 - 2\cos(\alpha+\beta) V_{экв} \cdot V_{сп}$$

$$d^2 = R_{\oplus}^2 + (R_{\oplus}+h)^2 - 2\cos(\alpha+\beta) R_{\oplus} \cdot (R_{\oplus}+h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{сп} = \sqrt{\frac{V_{экв}^2 + V_{сп}^2 - 2\cos(\omega_{\oplus} \cdot t + \omega_{сп_{max}} \cdot t) \cdot V_{экв} \cdot V_{сп}}{R_{\oplus}^2 + (R_{\oplus}+h)^2 - 2\cos(\omega_{\oplus} \cdot t + \omega_{сп_{max}} t) \cdot R_{\oplus} \cdot h}}$$

Эта скорость должна равняться $\frac{1}{2}\omega_{max}$.

$$\omega_{сп} = \frac{1}{2}\omega_{max} \Rightarrow \frac{V_{экв}^2 + V_{сп}^2 - 2\cos(t \cdot (\omega_{\oplus} + \omega_{сп_{max}})) \cdot V_{экв} \cdot V_{сп}}{R_{\oplus}^2 + (R_{\oplus}+h)^2 - 2\cos(t(\omega_{\oplus} + \omega_{сп_{max}})) \cdot R_{\oplus}(R+h)} =$$

$$= \frac{(V_{сп} + V_{экв})^2}{4h^2}$$

$$R_{\oplus}^2 \cdot \left(\frac{(V_{сп}+V_{экв})^2}{4h^2}\right) + (R_{\oplus}+h)^2 \cdot \left(\frac{(V_{сп}+V_{экв})^2}{4h^2}\right) - 2\cos(t(\omega_{\oplus} + \omega_{сп_{max}})) \cdot R_{\oplus} \cdot$$

$$(R+h) \cdot \frac{(V_{сп}+V_{экв})^2}{4h^2} + 2\cos(t(\omega_{\oplus} + \omega_{сп_{max}})) \cdot V_{экв} V_{сп} = V_{экв}^2 + V_{сп}^2$$

$$\cos(t(\omega_{\oplus} + \omega_{сп_{max}})) = \frac{V_{экв}^2 + V_{сп}^2 - R_{\oplus}^2\left(\frac{(V_{сп}+V_{экв})^2}{4h^2}\right) - (R_{\oplus}+h)^2 \cdot \left(\frac{(V_{сп}+V_{экв})^2}{4h^2}\right)}{2 V_{экв} \cdot V_{сп} - 2 R_{\oplus} \cdot (R_{\oplus}+h)}$$

Отсюда $t = \arccos\left(\dfrac{V_{экв}^2 + V_{сп}^2 - R_\oplus^2\left(\frac{(V_{сп}+V_{эк})^2}{4h^2}\right) - (R+h)^2\left(\frac{(V_{сп}+V_{эк})^2}{4h^2}\right)}{2V_{эк}\cdot V_{сп} - 2R_\oplus\cdot(R_\oplus+h)}\right)\cdot$

$\cdot\dfrac{1}{\omega_\oplus + \omega_{сп_{max}}}$. Это время, пройденное от Зенита до момента времени при

$\omega_{сп} = \frac{1}{2}\omega_{max} \Rightarrow$ Нужное время $T = 2t \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \arccos\left(\frac{V_{эк}^2 + V_{сп}^2 - R_\oplus^2\left(\frac{(V_{сп}+V_{эк})^2}{4h^2}\right) - (R_\oplus+h)^2\left(\frac{(V_{сп}+V_{эк})^2}{4h^2}\right)}{2\left(V_{эк}\cdot V_{сп} - R_\oplus(R_\oplus+h)\right)}\right)\cdot$$

$\cdot\dfrac{2}{(\omega_\oplus + \omega_{сп_{max}})}$. Здесь ~~$\omega_\oplus = \frac{360}{24\cdot3600}$~~, $\omega_\oplus = \dfrac{360^\circ}{T_{з.с.}}$, $T_{з.с}$ — звёздные сутки,

$\omega_{сп\,max} = \dfrac{360^\circ}{T_{сп}}$, $T_{сп}$ — период обращения спутника,

$V_{экв} = \dfrac{2\pi R_\oplus}{T_{з.с.}}$ — скорость вращения Земли (на экваторе)

$V_{сп} = \sqrt{\dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus+h}}$ — скорость спутника (линейная)

В итоге получается $T \approx 1$ минуте

Ответ: $T \approx 1$ минута

Задача 3

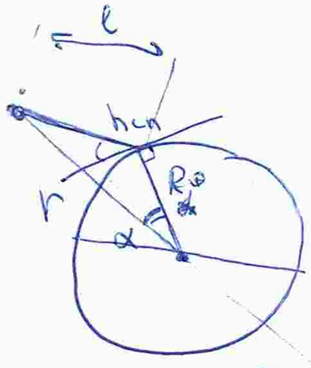

рис. 2.

~~Решение~~

Найдём высоту спутника: ~~для апогея:~~

$\alpha = \varphi_{с.п.} - i = 25{,}8^\circ$ (рис. 2) по теореме косинусов:

$l^2 = R_⊕^2 + r^2 - 2\cos\alpha \cdot R_⊕ \cdot r$

теорема синусов:

$\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin(90 + h_{сп})}$, $\sin(90 + h_{сп}) = \cos(h_{сп})$

$\cos(h_{сп}) = \frac{r}{l} \cdot \sin\alpha = \sqrt{\frac{r^2}{R_⊕^2 + r^2 - 2\cos\alpha \cdot R_⊕ \cdot r}} \cdot \sin\alpha$.

$h_{сп_1} = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_{max}^2}{R_⊕^2 + r_{max}^2 - 2\cos\alpha \cdot R_⊕ \cdot r}} \cdot \sin\alpha\right)$ - для апогея.

В данной формуле r - расстояние от центра Земли до спутника.

Найдём большую полуось спутника:

$\frac{a_{сп}^3}{a_л^3} = \frac{T_{сп}^2}{T_л^2} \Rightarrow a_{сп} = a_л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{сп}^2}{T_л^2}} = 384\,000\text{ км} \cdot \sqrt[3]{\frac{134^2\text{ мин}^2}{40000^2\text{ мин}^2}} =$

$\cancel{= 384000\text{ км} \cdot \sqrt[3]{11{,}6 \cdot 10^{-8}} = 384000 \cdot \sqrt[3]{116 \cdot 10^{-9}} =}$

$\cancel{= 384000 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 19{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} =$

$= 3{,}9 \cdot 10^5\text{ км} \cdot 10^{-3} \cdot 23 = 90 \cdot 10^2 = 9000$ км.

Тогда $r_{max} = Q = a(1+e) = 9000\,(1 + 0{,}18) = 10\,600$ км

$r_{min} = q = a(1-e) = 9000\,(1 - 0{,}18) = 7380 \approx 7400$ км.

~~Для~~ Для перигея формула высоты будет такой же, только с заменой угла α на угол $\beta = \varphi + i$, и также r_{max} на r_{min} =>

$$h_{cn_2} = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_{min}^2}{R_\oplus^2 + r_{min}^2 - 2\cos\beta\, R_\oplus \cdot r_{min}}} \cdot \sin\beta\right)$$

$$\cos h_{cn_1} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} = 10^{-2}$$

$$\cos h_{cn_2} = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$$

$\Rightarrow h_{cn_1}$ немного больше h_{cn_2}.

Отсюда следует, что наблюдать в апогее легче. На звёздную величину также влияет поглощение в атмосфере $\Rightarrow m_B = m + \frac{0{,}2^m}{\sin h}$. Если объекты находятся примерно на одной высоте, то его можно не учитывать.

Задача 5 Жук-15

Рассчитаем скорость, которую необходимо придать спутнику, чтобы он покинул Солнечную систему.

На орбите Земли спутник должен иметь скорость:

$v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} \cdot (\sqrt{2} - 1)$. Также, чтобы улететь с геостационарной орбиты ему необходимо ~~п~~ приобрести скорость $v_1 = \sqrt{2\frac{GM_\oplus}{a_{сп}}}$

Тогда из ЗСЭ (v_3 - скорость, необходимая для того, чтобы покинуть Солнечную систему):

$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}$$

$$v_3^2 = v_2^2 + v_1^2 \Rightarrow v_3^2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{2GM_\oplus}{a_{сп}}}$$

~~$v_3^2 = 29{,}800\ 29{,}8$~~ Большая полуось геостационарного спутника $a_{сп} \approx 42\,000$ км. Тогда $v_1^2 = 2 \cdot 10^7$ м/с

$(\sqrt{2} - 1)^2 = \cancel{(2/7)}, (1{,}4 - 1)^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = 0{,}16$

$$v_3 = \sqrt{29800^2 \cdot 0{,}16 + 2 \cdot 10^7 \text{ м/с}} = \sqrt{9 \cdot 10^8 \cdot 0{,}16 + 2 \cdot 10^7} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 10^6 \cdot 16 + 2 \cdot 10^7} = \sqrt{144 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7} = \sqrt{144 \cdot 10^6 + 20 \cdot 10^6}$$

$$= \sqrt{10^6 \cdot 164} = 13 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 13 \text{ км/с}.$$

Скорость, которую приобретёт аппарат вычислим с помощью формулы Циолковского

$$v_k = I \cdot \ln \left(\frac{M_0}{M_k}\right) = 4{,}5 \text{ км/с} \cdot 2 = 9 \text{ км/с}$$

~~v_3 - скорость, необходимая~~ ~~для~~

Т.к. $V_к < V_3 \Rightarrow$ аппарат не сможет покинуть Солнечную систему

Задача 2 | Жук-15 |

Предельная звёздная величина телескопа Мессье:

$m_{n_1} = m_r + 5\lg\left(\frac{D}{d}\right) = 6^m + 5^m = 11^m$

~~Средняя~~ Абсолютная звёздная величина одной ~~г~~ спиральной галактики ~~$m_{SG} = -21^m$~~ $M_{SG} = -21^m$

Также можно определить примерную предельную звёздную величину современных оптических приборов. Пусть диаметр современных телескопов ~~D~~ $D = 6м = 6000$ мм. Тогда их предельная звёздная величина:

$m_{n_2} = m_r + 5\lg\left(\frac{D}{d}\right) = 16^m$.

Самые яркие звёзды в спиральной галактике — голубые гиганты. Их абсолютная звёздная величина ~~составит~~ состовляет $M_{ВG} = -5^m$

Абсолютная звёздная величина связана с видимой следующим образом:

$M = m + 5 - 5\lg r \Rightarrow 5\lg r = m - M + 5 \Rightarrow r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} =$
$= 10^{\frac{37}{5}} \approx 5 \cdot 10^7$ пк $= 50$ Мпк. — ~~расстоя~~ Максимальное расстояние ~~в~~ при котором Мессье мог видеть галактику в свой телескоп. Ответ получается, если подставить $m = m_{n_1} = 11^m$, $M = M_{SG} = -21^m$

Получается ближе, чем 50 Мпк находится примерно 28 спиральных галактик.

Но все галактики дальше, чем $r_{min} = 0,5$ Мпк (расстояние до туманности Андромеда).

~~Минимальное~~ Максимальное расстояние, ~~которое~~ с которого можно наблюдать голубого гиганта.

$$r = 10^{\frac{m_{n_2} - M_{BG} + 5}{5}} = 10^{\frac{26}{5}} = 10^{5,4} \approx 5\cdot 10^{5} = 0,5\cdot 10^{6} =$$

$= 0,5$ Мпк.

Отсюда следует, что отдельные звёзды можно увидеть только в 1 галактике – туманность Андромеды, так как остальные галактики находятся сильно дальше, чем 0,5 Мпк. Т.е. количество ~~зве~~ отдельных звёзд, которые возможно увидеть с помощью 6-метрового телескопа – это количество отдельных звёзд в (которые можно увидеть с ~~помощью~~ с помощью этого телескопа) в туманности Андромеды.

Причём самые яркие звёзды – голубые гиганты с звёздной величиной ~~m~~ = (абсолютной) ~~M~~ $M_{BG} = -5^m$. Количество звёзд в туманности Андромеды $N_0 \approx 10^{11} \div 10^{12}$ звёзд. Из них голубыми гигантами являются $N_{BG} \approx 10^5 \div 10^6$. А с звёздной ~~величиной~~ величиной $M_{BG} = -5^m$ или ярче ~~будут~~ будет $N \approx 10^2 \div 10^3$ звёзд

~~Ответ: N = 10~~ ~~$N \approx 10^2 \div 10^3$ звёзд~~

~~В итоге количество спиральных галактик $N_{SG} = \left(\frac{r_{BGmax}}{r_{BSGmax}}\right)^3 \cdot 28 = \frac{0,5}{30} \cdot 28 \approx 0,28$~~ 10^{-2}

Количество спиральных галактик: $N = \left[\left(\frac{r_{\text{вся max}}}{r_{\text{вся min}}}\right)^3 \cdot 28\right] =$
$= \left[\left(10^{-2}\right)^3 28\right] = \left[28 \cdot 10^{-6}\right] = 0$. Т.е. количество галактик ~~определяется только~~, можно определить только сравнив расстояние до ближайшей с максимальным расстоянием, с ~~к~~ с которого можно увидеть звезду с $M \approx -5^m$.

Ответ: 1 спиральная галактика.

Задача 4

Т.к. $n = 20T^3 \Rightarrow$ ~~$N = V$~~ $N_{ф} = 20 \cdot T^3 \cdot V$ — количество фотонов. Здесь Количество звёзд в млечном пути $N_{зв} = 10^{11} \Rightarrow$ По закону Стефана-Больцмана:

$L_{зв} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow$ ~~T^4~~ $T = \sqrt[4]{\frac{L}{\sigma \cdot 4\pi R^2}}$

$T^3 = \sqrt[4]{\frac{L^3}{\sigma^3 \cdot 4^3 \pi^3 \cdot R^6}}$ Объём галактики $V = h \pi R_{ген}^2 =$

$= 500_{пк} \cdot \pi \cdot 64 \cdot 10^6_{пк} = 960 \cdot 10^8 \text{ пк}^3 \approx 10^{11} \text{ пк}^3 =$

$= 9 \cdot 10^{48} \approx 10^{49} \text{ м}^3 = 10^{55} \text{ см}^3$.

$N_{ф} = 20 \cdot 10^{55} \cdot N_{зв} \cdot \sqrt[4]{\frac{L^3}{\sigma^3 \cdot 64 \cdot \pi^3 \cdot R^6}}$

Для звёзд главной последовательности справедливо: $\frac{L_{зв}}{L_{\odot}} \approx$ ~~k~~ $L \sim M^4$ и $L \sim R^{5,2} \Rightarrow \frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^4$ и

$\frac{R}{R_{\odot}} \approx \frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{5,2} \Rightarrow N_{ф} \approx 10^{70}$

Ответ: $N_{ф} \approx 10^{70}$ фотонов