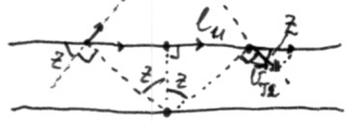
СПбАО 03.02.2019г.
Код участника Мос-13
Класс 11 Ауд. 36
Всего страниц 3

# №1

Т.к. 200 км << 6370 км $= R_\oplus$, можно рассматривать ситуацию в плоском приближении.




Пусть в момент, когда наблюдаемая угловая скорость стала равна половине максимальной (а максимальна она, очевидно, в зените: нет лучевой составляющей и наиболее близко к наблюдателю), зенитное расстояние ИСЗ равно z. Тогда угол между направлением полной скорости спутника и её тангенциальной составляющей — тоже z.

$\omega = \frac{v_т}{l}$, тогда, если $\omega_1 = 2\omega_2$, то $\frac{v_{полн.}}{R} = 2\frac{v_{т2}}{l_2} = 2\frac{v_{полн.}\cdot\cos z}{\frac{h}{\cos z}} = \frac{v_{полн.}}{h}\cdot 2\cos^2 z$. То есть $\cos^2 z = \frac{1}{2}$; $\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $z = 45°$.

Ситуация симметрична относительно зенита, тогда спутник летит $2\cdot l_н = 2\cdot h\cdot tg 45° = 2h = 2\cdot 200$ км $= 400$ км.

Т.к. 200 км $<< R_\oplus$, то $v_{сп} = v_{I\,орб.} \approx v_{I\,пов.з} = 8,4$ км/с

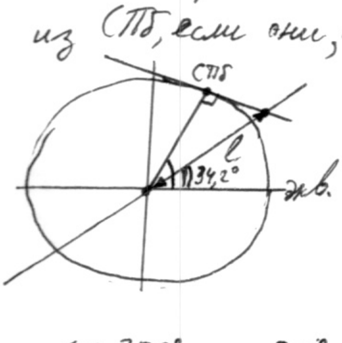
Тогда $t = \frac{400\text{км}}{8,4\text{ км/с}} \approx 48$ с

Ответ: в течение $t \approx 48$с. (№1)

# №3

Оценим большую полуось орбиты. $a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot GM_\oplus} \approx \sqrt[3]{\frac{(134\cdot 60с)^2}{40}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\,кг^{-1}\cdot м^3\cdot с^{-2}\cdot 6\cdot 10^{24}\,кг} \approx$
$\approx \sqrt[3]{134^2\cdot 60^2\cdot\frac{40}{40}\cdot 10^{-11}\cdot 10^{24}}$ м $= \sqrt[3]{134^2\cdot 6^2\cdot 10^5}$ м $\approx 8000$ км

Рассмотрим плоскость орбиты и Санкт-Петербург (выше всего апогей и перигей видны из СПб, если они, полюса и СПб лежат все в одной плоскости).




Для того, чтобы спутник при наблюдении из СПб был виден над горизонтом, расстояние от него до центра Земли должно быть больше $l = \frac{R_\oplus}{\cos(60° - 34,2°)} = \frac{6370\text{км}}{\cos(25,8°)}$. (60° с.ш. — широта СПб).

Оценим $\cos(25,8°)$:

$\cos 25,8° = \cos 30°\cos 4,2° + \sin 30°\sin 4,2° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4,2\cdot 60\cdot 60}{206265} \approx \frac{1,7}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4,2\cdot 3600}{2\cdot 10^5} = \frac{1}{2}(1,7 + 0,0756) = \frac{1,7756}{2} \approx 0,89.$

Тогда $l \approx \frac{6370\text{км}}{0,89} \approx 7160$ км

Для орбиты: $r_a = a(1+e) \approx 8000\text{км}\cdot(1+0,184) \approx 9500$ км;
$r_п = a(1-e) \approx 8000\text{км}\cdot(1-0,184) \approx 6530\text{км} < 7160$ км.

Как видно, в перигее спутник не наблюдается (или, если это вышло из-за ошибки приближённого вычисления, наблюдается низко над горизонтом — а чем ближе к горизонту, тем быстрее возрастает атмосферное поглощение ($\sim 15^m$ на гориз.)) — так что спутник в апогее виден гораздо лучше, чем в перигее.

Ответ: в апогее проще. (№3)

## №5

Найдём, какую максимальную скорость сможет развить спутник.

1) ~~в~~ от топлива. Воспользуемся формулой Циолковского:

$$v_{доб.т.} = p_{уд.} \cdot \ln \frac{M}{M_0} = 4{,}5\,км/с \cdot \ln\frac{(6{,}4+1)\,т}{1\,т} \approx 4{,}5\,км/с \cdot \ln 7{,}4 \approx 4{,}5\,км/с \cdot 2 = \underline{9\,км/с}$$

2) от вращения вокруг Земли. ~~∃~~ Геостационарная орбита — т.е. $T = T_\oplus = 23^h 56^m 04^s \approx 24^h$.

$$v_{вр.з.} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{\sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot GM_\oplus}}} = \sqrt[6]{\frac{G^{\cancel{3}2} M_\oplus^{\cancel{3}2}\cdot 4\pi^2}{\cancel{G}\,\cancel{M_\oplus}\cdot T^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus \cdot 2\pi}{T}} \approx \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\cancel{кг^{-1}}\cdot м^3\cdot с^{-2}\cdot 6\cdot 10^{24}\,\cancel{кг}\cdot 2\cdot 3{,}14}{24\cdot 60\cdot 60\,с}} \approx$$

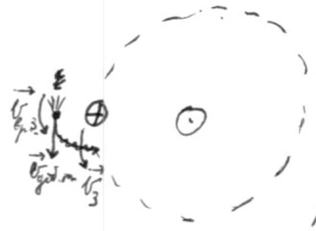
$$\approx \sqrt[3]{\frac{20\cdot 10^{13}\cdot 6}{24\cdot 3600}}\,м/с \approx \sqrt[3]{\frac{12}{24\cdot 36}}\cdot 10^4\,м/с = \sqrt[3]{\frac{1}{72}}\cdot 10\,км/с \approx \sqrt[3]{14}\,км/с \approx \underline{2{,}5\,км/с}$$

3) от вращения Земли вокруг Солнца.

$\underline{v_3 = 30\,км/с}$

Все эти скорости можно сложить, при этом наибольшая возможная скорость будет, если все вектора сонаправлены:

(в местную полночь надо начать разгоняться)




При этом аппарату нужно ещё улететь из гравитационного поля Земли.

Т.к. $v_{II} = \sqrt{2}\cdot v_I$, можно написать формулу для наибольшей скорости, которую может развить аппарат на орбите Земли:

$$v_{max} = v_{доб.т.} + v_{I\,вр.з.} - v_{II\,вр.з.} + v_3 = v_{доб.т.} + v_3 - (\sqrt{2}-1)\,v_{I\,вр.з.}$$

Её нужно сравнить со II косм. на орбите Земли: если $\overset{\sqrt{2}\cdot v_3}{\overset{\parallel}{v_{II.з}}} \le v_{max}$, то ~~р~~ аппарат сможет улететь, иначе — нет.

$$\Updownarrow$$

$$0 \le v_{max} - v_{II\,з}$$

$$v_{max} - v_{II\,з} = v_{доб.т.} - (\sqrt{2}-1)\,v_{I\,вр.з.} + v_3 - v_{II\,з} = v_{доб.т.} - (\sqrt{2}-1)\,v_{I\,вр.з} - (\sqrt{2}-1)\,v_3 =$$

$$= v_{доб.т.} - (\sqrt{2}-1)(v_{I\,вр.з} + v_3) \approx 9\,км/с - (1{,}4-1)(2{,}5\,км/с + 30\,км/с) \approx 9\,км/с - 0{,}4\cdot 32{,}5\,км/с =$$

$$= 9\,км/с - 13\,км/с = -4\,км/с < 0$$ — не смог. Аппарату не хватило скорости.

Ответ: нет, не сможет: ему не хватит разгона. (№5)

## №2

Как известно, максимальное угловое разрешение телескопа можно вычислить по формуле $\frac{\lambda}{D}$. Самый большой ~~[illegible]~~ оптический телескоп имеет диаметр 6 м — в 100 раз больше рефрактора Мессье; тогда максимальное угловое разрешение в 100 раз меньше.

Даже если принять ~~за~~ средний размер спир. галактики — как Млечный путь ($d \approx 32$ кпк), ~~а расстояние между звёздами — 10 пк (хотя яркие звёзды~~ а расстояние от звезды до рукава ~ ~~[illegible]~~ 4 кпк (хотя яркие звёзды вне рукавов почти не рождаются; но так как её ...

больше), и при этом для того, чтобы Мессье смог различить контуры галактики, ему требовалось разрешение меньше углового размера галактики — всё равно получаем $l_{max\ до\ г.\ с\ в.\ зв.} \approx l_{400\ max\ M.} \cdot \frac{4400\ пк}{32\ кпк} \cdot c = \frac{100 \cdot c}{16 \cdot 3/4} \cdot l_{max\ M.} \approx 7 l_{max\ M.}$), т.е. величина ~~порядок величины того же — несколько десятков~~ не больше, чем на порядок превышает порядок числа галактик, виденных Мессье.

Ответ: несколько десятков — сотен. (№2)

## №4

Объём с концентрацией $n \approx 20T^3$ можно найти через разность объёмов почти совпадающих сфер: $V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 + 3R^2\Delta R \underbrace{+ 3R\Delta R^2 + \Delta R^3}_{\approx 0,\ т.к.\ \Delta R \ll R} - R^3\right) \approx 4\pi R^2 \Delta R$

В этом объёме фотонов $N_{сф.} = V \cdot n = 4\pi R^2 \cdot n \cdot \Delta R$.

Свет улетает от тела с одной и той же скоростью — скоростью света в вакууме, т.е. во всех „прослойках" между сферами одно и то же число фотонов. Тогда для одной звезды число фотонов в сфере радиусом $h$ будет равно $N = N_{сф} \cdot \frac{h}{\Delta R} = 4\pi R^2 \cdot n \cdot \Delta R \cdot \frac{h}{\Delta R} = 4\pi R^2 h \cdot n$.

Для оценки поместим все звёзды в центр Галактики. Сферическое гало — тоже Галактика, поэтому 1) мы можем так перемещать; 2) мы можем считать для сферы. Далее примем все звёзды аналогичными Солнцу.

Тогда $h = 32$ кпк (радиус сф. гало $\approx$ диаметру диска галактики). $T = 5800$ К. $N_{зв.} \approx 2 \cdot 10^9$

$$N_{ф.} = N_{зв.} \cdot 4\pi R_\odot^2 \cdot h \cdot 20\,см^{-3} \cdot К^{-3} \cdot T^3 \approx 2\cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot (7\cdot 10^5\,км)^2 \cdot 32\,кпк \cdot 20\,см^{-3}\cdot К^{-3} \cdot (5800\,К)^3 \approx$$

$$\approx 2\cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot (7\cdot 10^5)^2\,км^2 \cdot 32\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 10^{13}\,км \cdot 20 \cdot 10^{15}\,км^{-3} \cdot 5800^3 \approx$$

$$\approx 2^4 \cdot 3{,}14 \cdot 49 \cdot 32 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 58^3 \cdot 10^{9+10+3+13+16+6} \approx 8 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 3{,}2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6^3 \cdot 10^{62} \approx 4 \cdot 6^4 \cdot 10^{64} = 7{,}2^2 \cdot 10^{66} \approx 5 \cdot 10^{67}$$

Ответ: в галактике фотонов порядка $5 \cdot 10^{67}$. (№4)