XXVI Санкт-Петербургска олимпиада по Астрономия

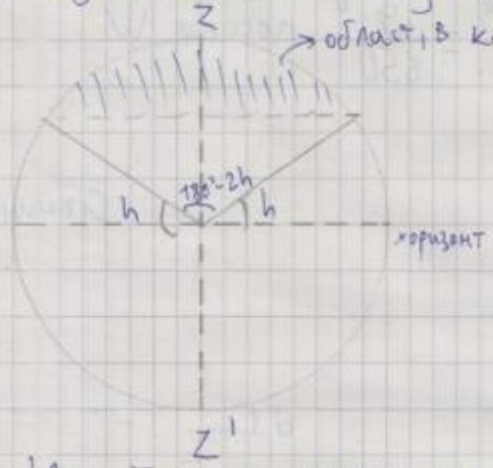
Теоретичен тур
4.02.2019г.

Задача 1.

Броят на нужните спътници е минимален, когато те са геостационарни, т.е. периодите им са:

$$T = T_{\oplus} = 23^h 56^{min} 4^s.$$

Във всеки момент от време трябва да има поне един сателит над височината $h = 40°$



Имайки предвид, че спътниците са равномерно разпределени над дадена географска ширина, то за броя спътници нужни над даден паралел:

$$n_0 \geq \frac{360°}{180°-2h} \qquad n_0 \geq \frac{18}{5}$$

$$\Rightarrow n_0 = 4$$

Минималният брой паралели, над които е нужно да има спътници, е:

$$n_\varphi \geq \frac{180°}{90°-h} \qquad n_\varphi = 4$$

$N = n_0 n_\varphi = 16$ (Общ брой спътници.)

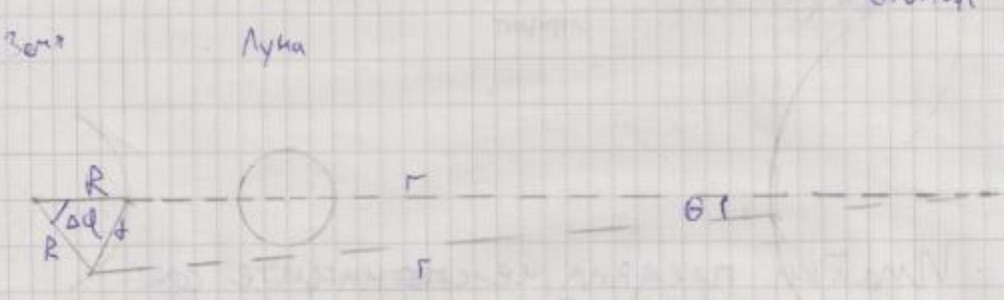
Задача 2.

Точката на изгрева ще бъде отместена западно заради прецесията на земната ос. Ако $t = 1y$, $T_p = 26\,000y$ е периодът на прецесията и θ е ъгълът на отместване:

$$\frac{t}{T_p} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\theta = \frac{t}{T_p} \cdot 360^\circ = \frac{9}{650}^\circ \text{, посока W}$$

Задача 3.



$\Delta\varphi$ - разлика в географските ширини
R - радиус на Земята
r - разстояние Земя - Слънце

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos\Delta\varphi = 2R^2(1-\cos\Delta\varphi)$$

$$d = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\Delta\varphi}$$

$$d^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\theta = 2r^2(1-\cos\theta)$$

$$\cancel{2}r^2(1-\cos\theta) = \cancel{2}R^2(1-\cos\Delta\varphi)$$

$$1-\cos\theta = \frac{R^2}{r^2}(1-\cos\Delta\varphi)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{R^2}{r^2}(1-\cos\Delta\varphi)$$

$$\cos\Delta\varphi \simeq \cos 10^\circ \approx 0{,}013$$

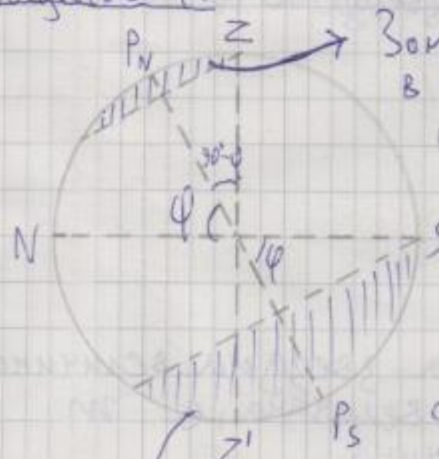
$$\frac{R}{r} \approx 4\cdot 10^{-5}$$

Вижда се, че $\frac{R^2}{r^2}(1-\cos\Delta\varphi) \to 0$,

$\cos\theta \to 1$ и $\theta \to 0$

$\Rightarrow$ Максималната фаза ще бъде почти пълна, т.е. $\Phi \approx 1$.

Задача 4.



Зона от небесната сфера, в която всички звезди кулминират на север от зенита. Ъгловата ѝ площ е:

$$\Omega_1 = (1+\cos(90^\circ-\varphi))\pi$$

$$\Omega_1 = (1+\sin\varphi)\pi$$

Ако общо видимите звезди са N, то в Ω_1 има

$$n_1 = \frac{\Omega_1}{4\pi}N = \frac{1+\sin\varphi}{4}N$$

Зона на ~~незалязващ~~ неизгряващите звезди. Аналогично:

$$\Omega_2 = (1+\cos\varphi)\pi$$

$$n_2 = \frac{\Omega_2}{4\pi}N = \frac{1+\cos\varphi}{4}N$$

Общият брой звезди, видими от града:

$$n = N - n_2 = \left(1 - \frac{1+\cos\varphi}{4}\right)N = \frac{3-\cos\varphi}{4}N$$

Търсеното отношение е:

$$K = \frac{n_1}{n} = \frac{1+\sin\varphi}{3-\cos\varphi} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3-\frac{1}{2}} \approx \frac{3,7}{5}$$

$$K \approx 74\%$$

Задача 5.

Нека началното собствено движение е ω_0. Новото е $\frac{\omega_0}{4}$. Ако началното разстояние до звездата е r_0 и V_τ е перпендикулярната на зрителния лъч компонента на скоростта, то за новото разстояние до звездата (r) имаме:

$$\begin{cases} V_\tau = \omega_0 r_0 \\ V_\tau = \frac{\omega_0}{4} r \end{cases} \Big/ :$$

$$1 = \frac{r_0}{\frac{1}{4} r}$$

$$r = 4 r_0$$

Нека $m_0 = 7^m$ е началната звездна величина, M е абсолютната звездна величина, а m е новата звездна величина

$$m_0 = M - 5 + 5 \lg r_0$$

$$M - 5 = m_0 - 5 \lg r_0$$

$$m = M - 5 + 5 \lg r = m_0 - 5 \lg r_0 + 5 \lg r$$

$$m = m_0 + 5 \lg \frac{r}{r_0} = m_0 + 5 \lg 4$$

$$\lg 4 \approx 0,6$$

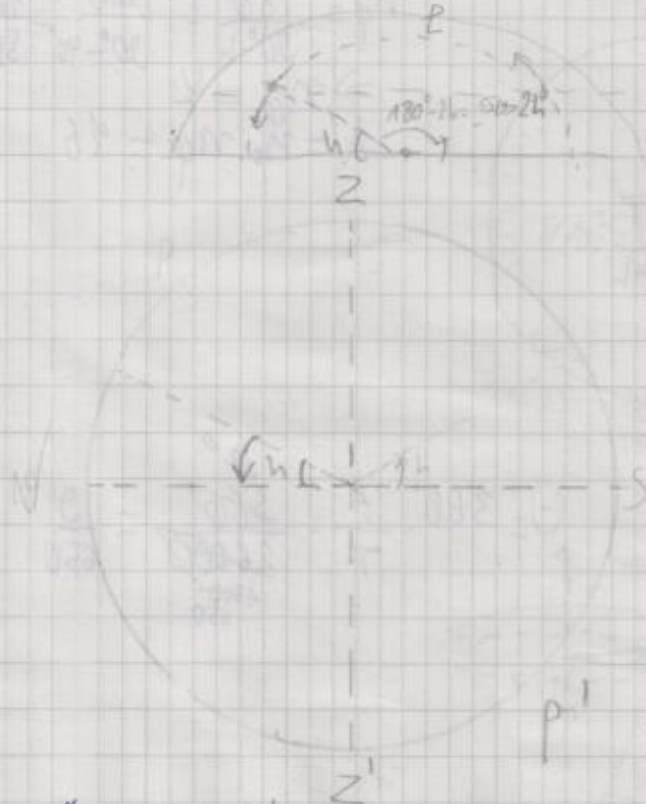
$$m \approx 10^m$$

Чернова

① $H = inv$ / $T = ?$ $n = ?$ (min)
$h \geq 40^0$

$40^\circ = \frac{40^\circ}{180^\circ} \cdot \pi\, rad = \frac{2}{9}\pi$

$\frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18}$



$\ell = (\pi - 2h)R$
$L = 2\pi R$
$\frac{\ell}{L} = \frac{\pi - 2h}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi}$

$\frac{\ell}{L} = \frac{t}{T}$
$T = n_0 t_1$
$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{n_0}$
$n_0 = \frac{L}{\ell}$

$t = \frac{\pi - 2h}{\omega}$

$\omega = \omega_\oplus \pm \omega_x$
$n \to min \Rightarrow \omega_x = 0$

$T = \frac{L}{\ell} t = \frac{\pi - 2h}{\omega_\oplus} \cdot \frac{2\pi}{\pi - 2h}$

$n_0 = \frac{2\pi}{\pi - 2h} = \frac{2\pi}{\pi - \frac{4}{9}\pi} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{18}{5}$

$\Rightarrow n_0 = 4$

$t = \frac{\pi - 2h}{\omega}$ or

$w \Rightarrow$ Най-удобно е да бъде геостационарен

$\Rightarrow T = T_{\oplus} = 23^h 56^m 4^s$

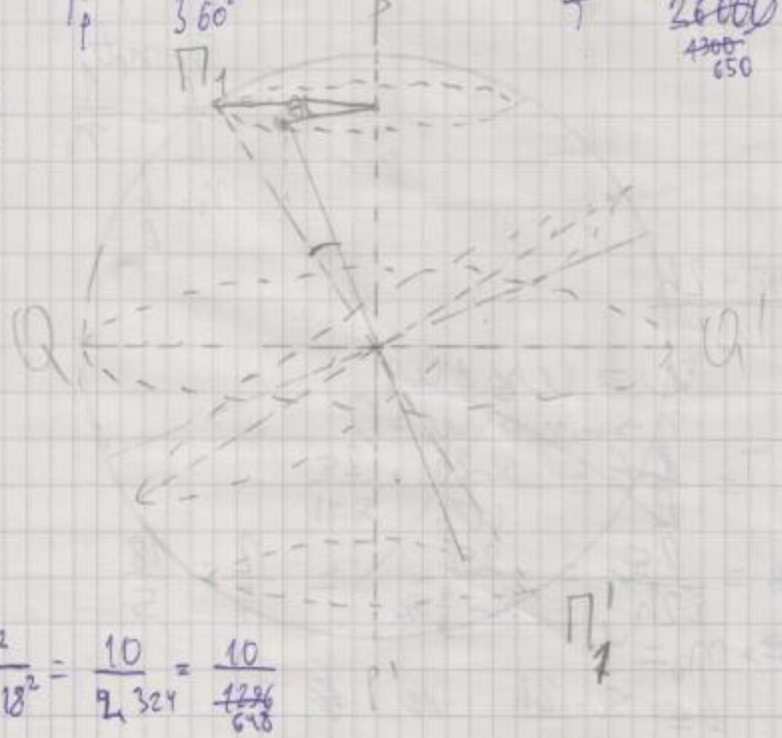
$$n_\varphi = \frac{180°}{90°-h} = \frac{180°}{90°-40°} = \frac{180°}{50°}$$

$$\Rightarrow n_\varphi = 4$$

$$N = n_0 \cdot n_\varphi = 16$$

② $\frac{t}{T_p} = \frac{\theta}{360°}$ $\qquad \theta = 360° \cdot \frac{t}{T} = \frac{360°}{26000} = \frac{9°}{650}$

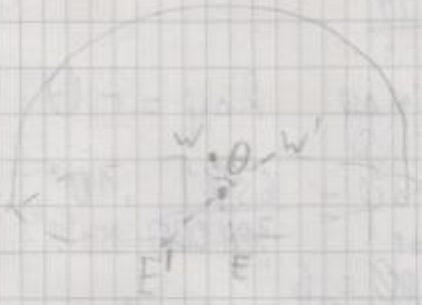
$\frac{324.4}{1296}$



$$\frac{9^2}{4 \cdot 18^2} = \frac{10}{4 \cdot 324} = \frac{10}{1296}$$

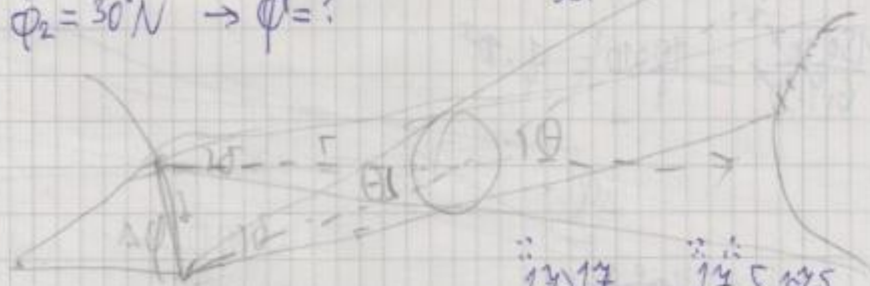
Л се отклонява в западна посока
с ъгъл θ

$3{,}14 \cdot 3{,}14$
$+\ 1256$
314
942
$9{,}8596$



$18 \cdot 18$
$+\ 144$
18
324

③ $\varphi_1 = 40^\circ N \to \phi = 1$
$\varphi_2 = 30^\circ N \to \phi = ?$



$17{,}3 \cdot 17{,}3$
$+\ 519$
1211
173
$299{,}29$

$17 \cdot 17$
$+\ 119$
17
289

$17{,}5 \cdot 17{,}5$
$+\ 875$
1225
175
$306{,}25$

$\ell = \sqrt{R^2 + R^2 - 2RR\cos\Delta\varphi} = R\sqrt{2 - 2\cos\Delta\varphi}$

$\phi = \frac{\delta + \delta - \theta}{\delta} = \frac{\delta - \theta}{\delta}$
$= 1 - \frac{\theta}{\delta}$

$17 \cdot 17$
189
17
289

$\sin 10^\circ = \sin \frac{\pi}{18}\,\mathrm{rad} \simeq \frac{\pi}{18}$

$17{,}6 \cdot 17{,}6$
$+\ 1056$
1232
176
$309{,}76$

$\cos 10^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 10^\circ} = \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{18^2}} =$
$= \sqrt{\frac{324 - 10}{324}} = \sqrt{\frac{314}{324}} = \frac{\sqrt{314}}{18} \simeq \frac{17{,}7}{18}$

$\frac{d}{2} \approx R \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{R\Delta\varphi}{2} \Rightarrow \frac{6371 \cdot 5c}{18}$

$\frac{6371 \cdot 3,14}{4}$

1cm → 1000 km

1mm → 1000 km

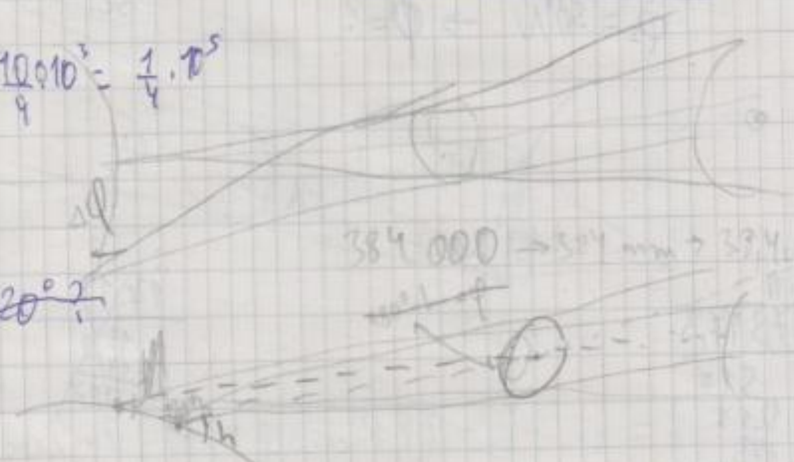
$R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ $\quad R\Delta\varphi = r\,\Theta$

$\Theta = \frac{R}{r}\Delta\varphi = \frac{6371}{384\,000} \cdot 10^\circ$

$\cancel{384\,000} : 6400 = 6$

$\Theta \approx \frac{1}{65} \cdot 10^\circ = \frac{5}{3}^\circ = 1\frac{1}{3}^\circ \approx 1,3^\circ$

$\frac{150 \cdot 10^{3}}{6,4 \cdot 10^{3}} = \frac{100}{4} \cdot 10^3 = \frac{1}{4} \cdot 10^5$



~~$\vartheta_0 \approx 20^\circ ?$~~

$\frac{150 \cdot 10^{6}}{6400} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^5 = 25 \cdot 10^3 \quad \Theta = 4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^\circ = 4 \cdot 10^{-4}$

~~$\Theta = 10^{-4}$~~

$\frac{4 \cdot 10^{-4}}{1} = 4 \cdot 10^{-4}$

(4)

$$\cancel{n_0 = \frac{1-\cos\varphi}{4}}$$

$$\cancel{n_0 = \frac{4\pi - (1-\cos\varphi)\,4\pi}{4\pi} N}$$

$$\cancel{n_0 = \cos\varphi \cdot N}$$

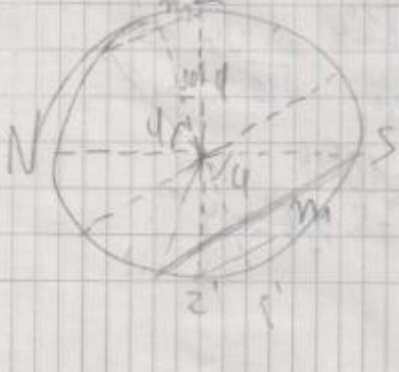
$$\cancel{n = 1-\cos\varphi}$$

$$n_0 = \frac{4\pi - (1-\cos\varphi)\pi R^2}{4\pi R^2} N = \left(1 - \frac{1-\cos\varphi}{4}\right) N$$

$$\cancel{n = \frac{\frac{(1-\cos\varphi)}{4}}{1-\frac{(1-\cos\varphi)}{4}} N}$$

$$n_x = \frac{(1-\cos\varphi)\pi R^2}{4\pi R^2} N = \frac{1-\cos\varphi}{4} N$$

$$\cancel{n = N - n_x}$$



$$\frac{n_1}{N} = \frac{1+\cos\varphi}{4}$$

$$\frac{n_1}{N} = \frac{1+\cos(90^\circ-\varphi)}{4} = \frac{1+\sin\varphi}{4}$$

$$\frac{n}{N} = 1 - \frac{n_1}{N} = \frac{4-1-\sin\varphi}{4} = \frac{3-\sin\varphi}{4}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{3-\cos\varphi}{3-\sin\varphi} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6-\sqrt{3}} \approx \frac{5}{4{,}3} = \frac{50}{43}$$

$\cancel{6-1{,}7}$

$6{,}0$
$-1{,}7$
$4{,}3$

(5) $m_0 = 7^m$, w_0 $\qquad \Delta r = V_z t$

$m = ?$, $w = \frac{w_0}{4}$ $\qquad \cancel{w_0 = V_x r_0}$

$\cancel{w = V_x}$

$v = const$

$v = w r$ $\qquad V_x = w_0 r_0$

$V_x = \frac{w_0}{4} r$

$$\frac{1}{1} = \frac{r_0}{\frac{r}{4}}$$

$$r = 4 r_0$$

$$m_0 = M + 5 - 5\lg r_0$$

$$M + 5 = m_0 - 5\lg r_0$$

$$m - 5\lg r = m_0 - 5\lg r_0$$

$$m = m_0 + 5\lg r - 5\lg r_0 = m_0 + 5\lg \frac{r}{r_0} =$$

$$= m_0 - 5\lg \frac{4 r_0}{r_0} = 4^m - 5\lg 4$$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 9$ $\qquad \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{10} \approx 3{,}1$

$10^{0{,}6}$

$4 \approx 10^{0{,}6}$

$m = 7^m - 5 \cdot 0{,}6^m \approx 4^m$