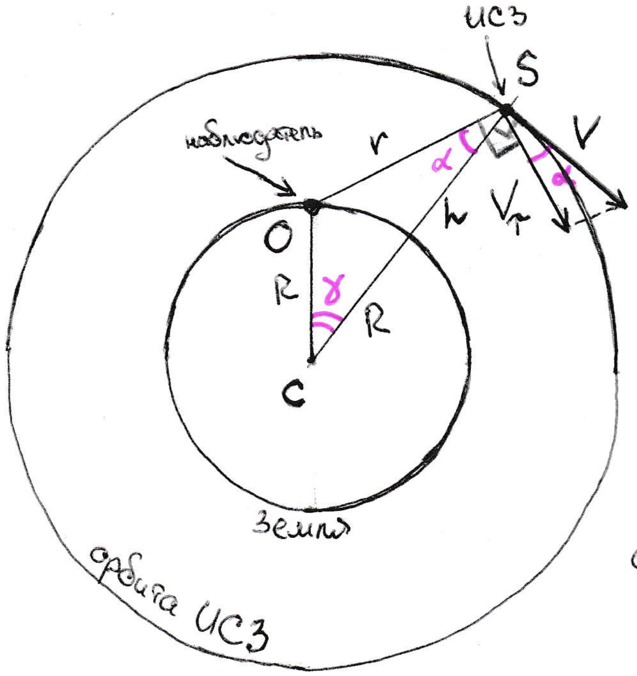
№1

Угловая скорость аппарата максимальна в зените и равна угловой скорости вращения ИСЗ по орбите.

Кроме того, $\omega_{MAX} \propto V$, где V – скорость движения по орбите. Но это верно, только когда $\vec{V} \perp \vec{r}$, где $\vec{r}$ – вектор от наблюдателя к ИСЗ. В остальных случаях $\omega \propto V_\tau$, где V_τ – тангенциальная составляющая вектора скорости $\vec{V}$.

По условию $\frac{\omega}{\omega_{MAX}} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_\tau}{V} \geqslant \frac{1}{2}$. Изобразим это положение на рисунке.



Из рисунка $\frac{V_\tau}{V} = \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нам нужно, чтобы $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in (0^\circ; 60^\circ)$

Для определения искомого времени достаточно определить угол γ, откуда

$t = \frac{2\gamma}{360} \cdot T = \frac{\gamma}{180} T$, где T – период обращения спутника.

Найдем этот угол:

$\angle OSC = \angle(V, V_\tau) = \alpha = 60^\circ$ как углы со взаимоперпенд. сторонами.

По т. cos

$SO^2 + SC^2 - 2SO \cdot SC \cdot \cos\alpha = OC^2$; $OC = R = 6400$ км – радиус Земли

$SC = R + h = 6600$ км – радиус орбиты спутника (h – высота спутника)

] $SO = r$

$r^2 - 2 \cdot 6600 \cdot \frac{1}{2} \cdot r + 6600^2 - 6400^2 = 0$

Откуда $r \approx 3000; 3600 \Rightarrow \bar{r} = 3300$ км

По т. sin

$\frac{SO}{\sin\gamma} = \frac{CO}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{SO}{CO} \cdot \sin\alpha = \frac{3300}{6400} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43 \Rightarrow \gamma \approx 25^\circ$

$\boxed{\rightarrow}$

Тогда $t = \frac{25}{180} T$

Найдем период обращения спутника вокруг Земли по III з. Кеплера:

$$\frac{T^2 M}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot (6600 \cdot 10^3)^3}{6{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} \approx 5300c$$

Тогда искомое время

$$t = \frac{25}{180} \cdot 5300 \approx 689c \approx 11 \text{ мин } 30 \text{ сек}$$

Ответ: 11 минут и 30 секунд

№2

Найдем (предельные) максимальные звездные величины, видимые в телескоп Мессье и в современные телескопы:

$$m_M = 6^m + 5\lg\frac{D_{мм}}{6_{мм}} = 6^m + 5 \cdot \lg\frac{60}{6} = 11^m \longleftarrow \text{телескоп Мессье}$$

В качестве современного телескопа возьмем БТА с $D = 6м$ (на самом деле, БТА – не самый современный телескоп. В качестве такового можно было бы взять телескоп Кекса с $D = 10м$, но от этого результат изменится всего на $5\lg\frac{10}{6}$, а 6м и 6мм хорошо сокращаются.):

$$m_{БТА} = 6^m + 5\lg\frac{6000}{6} = 21^m$$

Тогда по з. Погсона можно найти отношение радиусов сфер, в которых Мессье и БТА могут проводить наблюдения.

$$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}5^{m_2 - m_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 2{,}5^{\frac{m_2-m_1}{2}} = 2{,}5^{\frac{21-11}{2}} = 2{,}5^5 = 100 \Rightarrow R_2 = 100 R_1 \Rightarrow \text{БТА может}$$

проводить наблюдения объектов в 100 раз более далеких, чем Мессье. Найдем отношение объемов этих сфер:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^3}{R_1^3} = 10^6$$

При однородном распределении галактик в ближней Вселенной $\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} = 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_2 = N_1 \cdot 10^6 = 28 \cdot 10^6$ штук.

Тогда БТА может наблюдать примерно 28 млн. галактик.

$\boxed{G}$

На самом деле, число галактик больше, т.к.:
ⓐ Мессье мог пропустить какие-то галактики из виду.
ⓑ Он не мог наблюдать галактики, которые не восходят над Парижем.

№3

Для решения задачи нужно определить, видим ли спутник в каждом из состояний (перигелии или афелии), т.е. определить его высоту над горизонтом.
Для начала определим его большую полуось, затем перигелийное и афелийное расстояние от ц. Земли.

По III з. Кеплера:

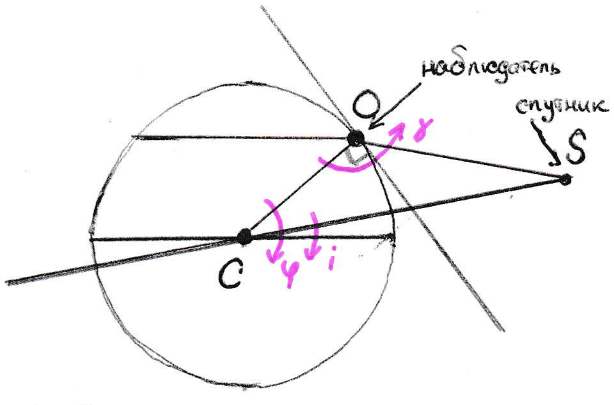
$$\frac{T^2M}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{T^2MG}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(137\cdot 60)^2\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}}{4\cdot 10}}\approx 8500\text{ км.}$$

Найдем перигелийное расстояние:

$$q=a(1-e)=8500\cdot 0{,}816\approx 7000\text{ км}$$

Афелийное:

$$Q=a(1+e)=8500\cdot 1{,}18\approx 10000\text{ км}$$



Найдем $\angle COS$, из которого потом сможем найти $h=\angle COS-90^\circ$

$SC=Q$ или q (будем искать для обоих случаев)

$OC=r=6400$ км

$\angle OCS=\varphi-i=60^\circ-34^\circ\approx 30^\circ$ (широта Петербурга)

① Найдем SO для $SC=Q$:

по т. cos $SO=\sqrt{OC^2+SC^2-2OC\cdot SC\cos\angle OCS}=\sqrt{6400^2+10000^2-2\cdot 6400\cdot 10000\cdot\frac{\sqrt3}{2}}$

$\approx 6000 \Rightarrow$ по т. sin $\frac{6000}{\sin 30^\circ}=\frac{10000}{\sin\gamma}\Rightarrow \sin\gamma_1\approx\frac{5}{6}\approx 0{,}83$ ($SC>\sqrt{OC^2+SO^2}\Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma_1>90^\circ$)

② Найдем SO для $SC=q$

$$SO=\sqrt{6400^2+7000^2-2\cdot 6400\cdot 7000\cdot\frac{\sqrt3}{2}}\approx 4200\text{ км}$$

$\sin\gamma_2=\frac{7000}{4200}\cdot\frac12\approx\frac56\approx 0{,}83$, но в данном случае $SC<\sqrt{OC^2+SO^2}\Rightarrow$
$\Rightarrow\gamma_2<90^\circ\Rightarrow$ в перигелии спутник будет под горизонтом и не будет виден

Ответ: в афелии.

№4

Наша Галактика светит в видимом, преимущественно синем ($\lambda \approx 300$ нм) свете. Это значит, что по з. Вина мы можем найти „температуру" Галактики:

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{0{,}003}{3\cdot 10^{-7}} \approx 10^4\ K.$$

Тогда, зная температуру, найдем концентрацию фотонов из формулы в условии:

$$n \approx 20T^3 = 20\cdot 10^{12} = 2\cdot 10^{13}\ см^{-3} = 2\cdot 10^{19}\ м^{-3}$$

Осталось оценить объем галактики. Её радиус примерно равен

$$R = 50\cdot 10^3\ св.лет = 50\cdot 10^3\cdot 10^{16}\ м = 5\cdot 10^{20}\ м$$

Тогда объем

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}\cdot 3\cdot (5\cdot 10^{20})^3 = 4\cdot 125\cdot 10^{60} = 5\cdot 10^{62}\ м^3$$

Тогда суммарное количество фотонов

$$N = nV = 2\cdot 10^{19}\cdot 5\cdot 10^{62} = 10^{82}$$

Ответ: $\sim 10^{82}$ штук.

№5

Зная удельный импульс, мы можем определить скорость, которой может аппарат достичь за счет своего топлива по формуле Циолковского:

$$V = I\cdot \ln\frac{M+m}{M},$$ где M – масса аппарата, $M = 1$ тонна
m – масса топлива, $m = 6{,}4$ тонны

$$V_1 = 4500\cdot \ln\frac{7{,}4}{1} \approx 9000\ \frac{м}{с} = 9\ \frac{км}{с}$$

Но, кроме собственной скорости, аппарат еще имеет скорость при вращении на геостационарной орбите:

$$V_2 = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 42\cdot 10^3}{24\cdot 60\cdot 60} = 3\ \frac{км}{с}$$

Тогда его максимальная скорость будет равна $12\ \frac{км}{с}$, что меньше III космич., но меньше II космической $\Rightarrow$ он сможет покинуть орбиту Земли.

В этом случае аппарат может сделать гравитационный манёвр у одной из планет-гигантов и таким образом покинуть Солнечную Систему.

Ответ: да, но только при помощи гравитационного манёвра у планеты-гиганта.