193

⑤

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 4.5\ км/с \\ m_0 &= 10^3\ кг \\ m_T &= 6.4\cdot 10^3\ кг \end{aligned}}$$

Орбита геостационарная: $T = 24^h$

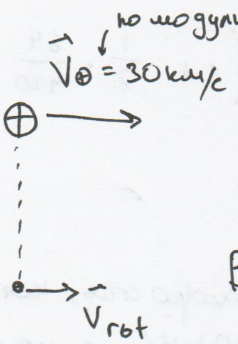
1) $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m_0)} \approx \dfrac{4\pi^2}{GM}$; $M = 6\cdot 10^{24}$ кг

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \cong \cancel{42000\ км}\ 42\cdot 10^3\ км,$$

потому что я это помню.

2) Чтобы аппарат покинул С.С., надо, чтобы его скорость была больше 3 космической для данной орбиты.

Нужно максимизировать начальную скорость:

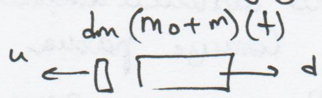


Сложим скорость вращения аппарата вокруг Земли и скорость Земли:

$$\max\{|\vec{V}_{rot} + \vec{V}_\oplus|\} = V_{rot} + V_\oplus$$

+ он ещё разогнался за счет топлива:

Выводим формулу Циолковского:



$u\,dm = -m\,dv$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} \Rightarrow -\frac{\Delta V}{u} = \int_{m_0+m_T}^{m_0} \frac{dm}{m} =$$

$$= \ln(m)\Big|_{m_0+m_T}^{m_0} = \ln(m_0) - \ln(m_0+m_T) =$$

$$= \ln\left(\frac{m_0}{m_0+m_T}\right)$$

$e^2 = 2.7^2 = 3^2 - 0.3^2 - 2\cdot 3\cdot 0.3 =$
$= 9 - 0.1 - 1.8 \approx 7.1$

$$\Delta V = -u\cdot\ln\left(\frac{1}{1+6.4}\right) = u\cdot\ln(7.4)$$

$\Delta V = 4.5\ км/с \cdot \ln(7.4) \approx 2\cdot 4.5\ км/с \approx 9\ км/с$. – максимальная добавка к скорости аппарата за счет топлива.

$\Rightarrow$ его максимальная скорость относительно Солнечной системы будет

$6.67\cdot 6 \approx 6\cdot 7 \approx 42$

$$V = V_\oplus + V_{rot} + \Delta V$$

$$V_\oplus = 30\ км/с\ ;\ V_{rot} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{42\cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{10^{-11}\cdot 10^{24}}{10^6}} = \sqrt{\frac{10^{13}}{10^6}} = \sqrt{10^7} \approx$$

$\approx 3\ км/с$

(5) Продолжение:

$$V = \underset{\text{это чуть меньше } 30\,км/с}{30\,км/с} + \underset{\text{это на самом деле } 3.5\,км/с \text{ где-то, т.к. } \sqrt{10}\approx 3.2}{3\,км/с} + 9\,км/с \approx \cancel{42.5\,км/с}\ 42\,км/с.$$

Расситаем 3 космическую для нашего аппарата:

$$\cancel{V_{III} = \sqrt{(V_{\oplus}\ 42\,км/с - 30\,км/с)^2 +}}$$

$$V_{III} = \sqrt{(42\,км/с)^2 + \left(11.2\,км/с \cdot \sqrt{\frac{6400\,км}{42000\,км}}\right)^2} =$$

↑ чтобы убежать от Солнца, это $\sqrt{2}V_{\oplus}$

↑ чтобы убежать от Земли. на расстоянии 42000 км.

$$= \sqrt{(42\,км/с)^2 + 11.2^2\,км^2/с^2 \cdot \frac{64}{420}} \approx 42\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{420}\cdot\frac{112}{420}\right) =$$

(т.к. $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ при $\alpha \ll 1$)

$$\approx 42 + \frac{64}{20}\cdot\frac{112}{420} \approx 42 + 3\cdot\frac{1}{4} \approx 43\,\frac{км}{с}$$

То есть мы получили, что максимальная скорость, которую может развить аппарат отн. Солнца равна 42 км/с, а надо чуть больше (~43 км/с). Замечу, что эти скорости примерно равны, но все же учитывая, что $V_{\oplus}$ чуть меньше 30 км/с, можно заключить, что аппарат не сможет улететь от Солнца, т.к. его максимальная скорость меньше скорости убегания от Земли + Солнца.

$\boxed{\text{Ответ: не сможет}}$

$$V_{II}^2(r=a) = \left(\sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a}}\right)^2$$

---

3 космическая скорость аппарата относительно Земли:

$$V_{III}^{\oplus} = \left((42-30)^2 + 11.2^2\left(\frac{6400}{42000}\right)\right)^{1/2} = (12^2 + 5^2)^{1/2} \approx 13\,км/с,$$

однако макс. его скорость относительно Земли будет $(3.5+9)\,км/с = V_{rot} + \Delta V = 12.5\,км/с$

=> даже при таком варианте решения спутник не сможет улететь из С.С. т.к. $V_{rot} + \Delta V < V_{III}^{\oplus}$

(учитывая нашу точность, однозначный ответ всё же дать нельзя, т.к. все полученные скорости примерно равны, но всё же лучше дать строгий ответ)

④ $n \approx 20T^3$. Возьмем и вспомним, что для Млечного пути характерен SFR ~ 1 M⊙/год, а значит соотношение масса / светимость ~ $2\frac{M_\odot}{L_\odot}$, т.к. активного звездообразования нет.

Оценим размеры Галактики, считая её диском с диаметром 30кпк$_{=2R_{MW}}$ и толщиной $\frac{1}{10}$ её радиуса.

Реально классная задача, спасибо ☺

Пусть объект с температурой T_0 и светимостью L светит. Тогда на расстоянии r от него температура будет такой:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_0^4 \quad ; \quad E = \frac{L}{4\pi r^2};$$

$$\Delta L = E \cdot \pi x^2 = 4\pi x^2 \sigma T^4(r) \qquad R \sim R_\odot$$

поставим на пути объект радиуса x

$$\Rightarrow 4\cancel{\sigma} T^4(r) = T_0^4 \cdot \cancel{\sigma} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow T = T_0 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{R}{2r}}}_{\sim \frac{1}{r^{1/2}}}, \quad n \sim T^3 \Rightarrow n \sim r^{-3/2}$$

А теперь сделаем как молодцы. Пусть этот объект со светимостью L примерно в центре Млечного пути, тогда количество фотонов от него выражается как:

$$N = \int_{r=0}^{r=R_{MW}} n\, dV \quad ; \quad dV = 2\pi r dr \cdot H; \quad H = 0.1R$$

(мне лень считать это более красиво и брать интеграл по объему, к тому же времени на это нет)

$$\frac{1}{T_0^3} N = \int_0^{R_{MW}} \frac{1}{T_0^3} n(r) \cdot 2\pi r dr H =$$

$$= 20 \cdot 2\pi H \cdot \int_0^{R_{MW}} \left(\sqrt{\frac{R_\odot}{2r}}\right)^3 r dr = 40\pi H \cdot R_\odot^{3/2} \cdot \int_0^{R_{MW}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{r^3}} r dr}_{r^{-1/2}} =$$

$$= \frac{20\pi \cdot 0.1 R_{MW} \cdot R_\odot^{3/2}}{\sqrt{2}} \cdot \left(2\sqrt{r}\right)\Big]_0^{R_{MW}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\pi \cdot \underbrace{R_{MW}^{3/2} R_\odot^{3/2}}_{\text{эта штука в см}^3} = \underbrace{\frac{4}{\sqrt{2}}\pi}_{\approx 10} \underbrace{\left(695000 \cdot 10^3 \cdot 10^2\right)^{3/2}}_{R_\odot(\text{см})} \underbrace{\left(3 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \cdot 10^2\right)^{3/2}}_{R_{MW}(\text{см})} =$$

④ Продолжение

WARNING: Я понимаю, что не учитываю поглощение и завышаю оценку.

$$\frac{1}{T_0^3}N = 10\cdot\left(10^6\cdot 10^5\right)^{3/2}\cdot\left(10^{22}\right)^{3/2} = 10\cdot\cdot 10^{33\cdot\frac{3}{2}} \approx 10^{\cancel{60}\,51}$$ фотонов от одной звезды.

в Млечном пути ~10^{11} звезд, значит

$$\frac{1}{T_0^3}N_\Sigma = 10^{11}N \approx 10^{\cancel{71}\,62}$$ фотонов.

~~Всего фотонов во Вселенной примерно 10^{80}, так что для оценки сойдёт~~

~~Ответ: 10^{71} фотонов~~ или меньше ($10^{70\div 69}$, т.к. я не учёл поглощение)

$$N_\Sigma = 10^{\cancel{71}\,62}\cdot(6000)^3 \approx 10^{\cancel{81}\,73}$$ фотонов.

~~Ответ: 10^{81} фотонов~~

~~Это больше, чем фотонов во Вселенной, хм.~~

Это много. Фотонов во Вселенной всего 10^{80}

неверный ответ.

Скажем, что для оценки можно „обрубить" $T(r)$ на характерном расстоянии ~~[illegible]~~, потому что дальше фотоны будут поглащаться чем-нибудь. А, я помню, есть же межзвездное поглощение

$\frac{dm}{dr} = +2\ ^m/\text{кпк}$. в диске галактики. Учтем его!!

$$\Rightarrow E = E_0\cdot\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\cdot 100^{-\frac{r}{2.5\text{пк}}}$$

освещенность падает в 100 раз за счет поглощения за 2.5 пк.

$\Rightarrow$ „обрубать" $T(r)$ нужно на характерных величинах, ~~порядка нескольких~~ когда поглощение ~~уб~~ уменьшит концентрацию в e раз $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 100^{-\frac{r}{2.5\text{пк}}} \approx 3 \approx e \approx \pi$$

$$-\frac{r}{2.5\text{пк}} = \log_{100}3 = \frac{1}{2}\log_{10}3 \approx \frac{1}{2\ln 10} \approx \frac{1}{6}$$

$$r \approx 0.5\text{пк}$$

Продолжение на Странице 11

193

① Вам нормально давать столько задач на спутники? ☺

$h = 200$ км

$a = R + h \approx 6600$ км.

Найдём период спутника:

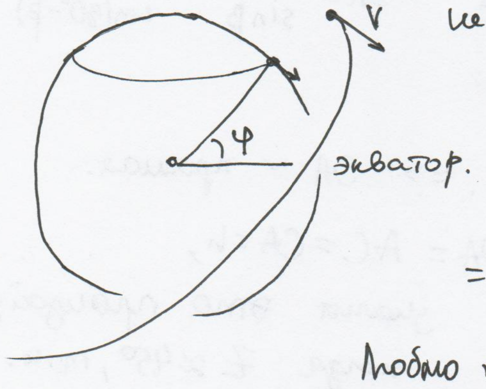
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(24^h)^2}{(42000\text{ км})^3} \leftarrow$$ сравниваем с геостационаром через 3 закон Кеплера.

$$T = 24^h \cdot \left(\frac{6600}{42000}\right)^{3/2} = 24^h \cdot \left(\frac{66}{420}\right)^{3/2} = 24^h \cdot \left(\frac{11}{70}\right)^{3/2} \approx 24^h \cdot \frac{1}{7^{3/2}} =$$

$$= \frac{24}{7\sqrt{7}} \approx \frac{3.1}{\sqrt{7}} = \qquad \sqrt{7} = \sqrt{9-2} = 3\sqrt{1-\frac{2}{9}} \approx 3\left(1-\frac{1}{9}\right) \approx 2.9$$

$$= \frac{3.1}{2.9} \approx \boxed{1.1 \text{ часа.}}$$, можно сказать, что за это время Земля почти не провернулась.

Очевидно, что мы не знаем широты и направления вращения спутника. Широта не нужна, т.к. мы считаем, что за время, пока спутник над горизонтом, Земля не двигается.



Вычислим скорость спутника:

$$v = \frac{2\pi R^a}{T} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6600\text{ км}}{1.1^h} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6600\text{ км}}{66 \cdot 60\text{ с}} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 10\text{ км/с}}{6}$$ — как-то много. ~~T = 1.3 часа, ошибка при вычислении периода.~~

Можно точность.

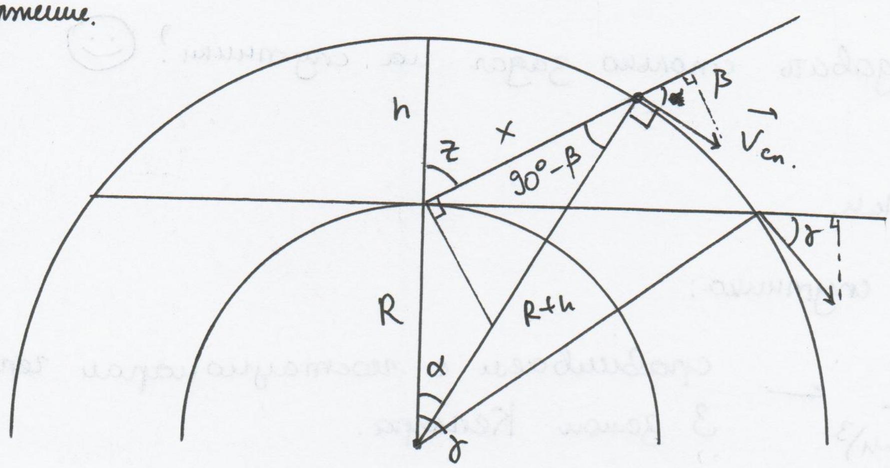
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus} \cdot \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6600 \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{13}}{10^5 \cdot 10}} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 10^7} = 10^3\sqrt{60} \approx 7.9 \cdot 10^3\text{ м/с} \approx \boxed{8\text{ км/с}}$$

Рисунок происходящего:

(см. сл. страницу).

① Продолжение.



$$\beta = 90^\circ - \left(180^\circ - \alpha - (180^\circ - z)\right) = 90^\circ - (z-\alpha) = 90^\circ + \alpha - z$$

Да, я ~~будем~~ не учитываю то, что Земля вращается, потому что спутник намного быстрее.

Да, максимальная угловая скорость у него в зените.

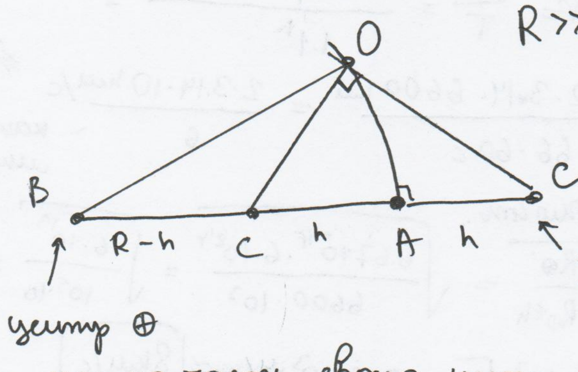
$$\omega = \frac{V}{h}\ ; \quad \omega_0 = \frac{\omega}{2} = \frac{V}{2h} = \frac{V\sin\beta}{x}$$

в момент, который нам нужно найти.

$$\frac{1}{2h} = \frac{\sin\beta}{x}$$

$$2h = \frac{x}{\sin\beta} = \frac{x}{\cos(90^\circ-\beta)},$$

тогда:

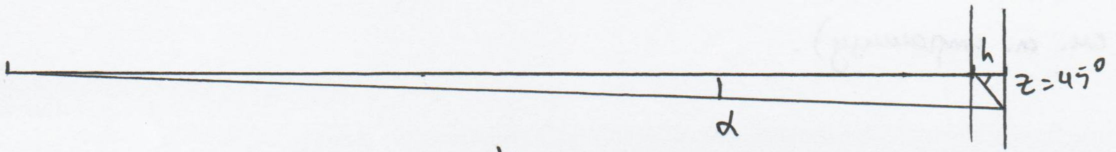


$R \gg h$. => OA ~ прямая.

$OA = AC = CA = h$,

значит это произойдет, когда $z \approx 45^\circ$, т.к. $\angle OAC = 90^\circ$, $AO = AC$

Найдем, какую часть своего пути спутник пройдет от $z = \cancel{90}\ 0^\circ$ до $z = 45^\circ$: (построение, т.к. я ленивый: $R = 6.4см\cdot 2$, $h = 0.2см\cdot 2$.)



$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{h\cdot \overset{\tan}{\cancel{\sin}}\, z}{R+h} = \frac{h}{R+h} \approx \frac{200}{6600} \approx \frac{1}{33}\ рад.$$

193

① Продолжение.

$$\alpha = \frac{1}{33\,\cancel{рад}}\ рад \Rightarrow \cancel{\frac{1}{33}\cdot\frac{180}{\pi}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\alpha}{2\pi}T \approx \frac{\cancel{66}\ 66\ мин}{33}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\ мин \approx 20\ сек.$$ от

момента прохождения зенита до $\frac{\omega}{2}$.

=> итого на небе его скорость будет больше $\frac{\omega}{2}$

время $2t = 40$ с.

$\boxed{\text{Ответ: 40 сек}}$

③ $T = 134$ мин
$e = 0.184$
$i = 34.2^\circ$
d_0 ~~D~~ $= 16$ см

Настоящие инженеры сначала посчитают, а видно ли спутник вообще.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(24^h)^2}{(42000\,км)^3} \Rightarrow \quad a = 42000\,км\cdot\left(\frac{134}{24\cdot 60}\right)^{2/3} =$$

сравним с геостационаром через 3 закон Кеплера

$$= 42\cdot 10^3\,км\cdot\left(\frac{11}{2\cdot 60}\right)^{2/3} \approx 42\cdot 10^3\,км\cdot\frac{1}{12^{2/3}} \approx$$

$$\approx 42\cdot 10^3\cdot\left(4\cdot 1.5^{2/3}\right)^{-1} =$$

$e \approx 0.2$, мне лень считать точнее.

$$= 42\cdot 10^3\cdot\frac{1}{4\cdot 1.3} = \frac{10.5}{1.3}\cdot 10^3\,км =$$

$$= 8000\,км$$

$q = a(1-e) \approx 0.8\cdot 8000\,км = 6400\,км.$ $\approx R_\oplus$, а значит спутник не будет виден в перигее

↳ перигейное расстояние.

=> проще наблюдать в апогее.

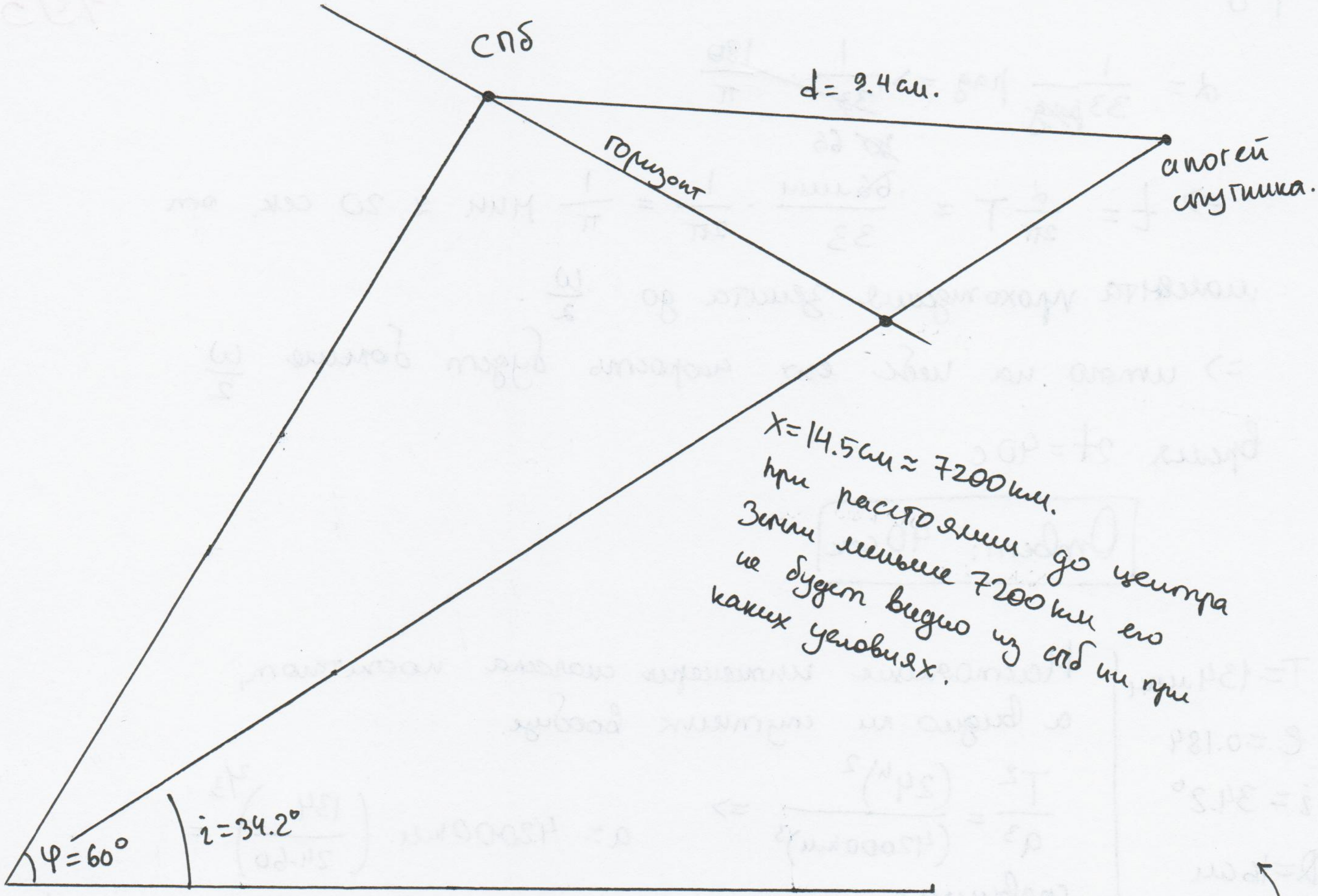
$Q = a(1+e) = 8000\cdot 1.2\,км = 9600\,км$

Нарисуем и посмотрим, видно ли его в апогее:

2 см = 1000 км.

см. следующий лист!

$R_{\oplus} = 6400\text{ км} = 12.8\text{ см}.$ ③ Продолжение.



В зависимости от высоты над горизонтом минимальное расстояние изменяется не очень сильно, а вот поглощение атмосферы – очень. (т.к. больше оптический путь), поэтому картинка оптимальна и что при такой картинке звездная величина спутника в апогее максимальна.

$d = 9.4\text{ см} = 4700\text{ км}$. (я же не буду считать руками).

Забьем на фазу ~~блу~~ спутника, освещенность от него будет:

$$E = E_0 \cdot \frac{\pi d_0^2}{4} \cdot \frac{1}{4\pi d^2} = E_0 \cdot \left(\frac{d_0}{4d}\right)^2$$ посчитаем его звездную величину:

$$\Rightarrow m = \underset{\substack{\parallel \\ -26.7^m}}{m_0} - 2.5 \lg \frac{E}{E_0} = -26.7^m - 2.5 \lg \left(\frac{16\text{см}}{4 \cdot 4700\text{км}}\right)^2 =$$

$$= -26.7^m + 5 \lg\left(\frac{4700 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{4}\right) =$$

$$= -26.7^m + 5\left(\lg \frac{4.7}{4} + 3 + 3 + 2\right) =$$

$$\lg \frac{4.7}{4} \approx \lg\left(1 + \frac{0.7}{4}\right) \approx \frac{0.7}{4 \ln 10} \approx \frac{0.7}{12}$$

$$= -26.7 + 5\left(\frac{0.7}{12} + 8\right) > 6^m$$ => его не видно глазом в апогее.

③ Продолжение

То есть в перигее он вообще под горизонтом,

а в апогее он слишком тусклый. Извините

=> $\boxed{\text{его вообще не видно}}$ ← ответ.

в Петербурге.

②

D = 6 см

x = 6 мм ← диаметр зрачка

$N_{spir} = 28.$

Предельная звёздная для телескопа Мессье будет

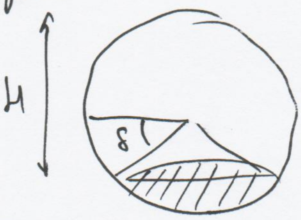
$$m_{lim} = 6^m + 5\lg\frac{D}{x} = \boxed{11^m}$$

Мессье жил во Франции => ему была доступна не вся небесная сфера, а лишь где-то до $-\cancel{50}\ 45^\circ$ по склонению.

(широта у него примерно 45° => $h_{в.к.} = 0 = 90^\circ - |\delta - \varphi|$ =>

=> $\delta = -45^\circ$ – предельный случай склонения.

то есть он видел только часть небесной сферы:



$$x = \frac{2\pi R H}{4\pi R^2}\ ; \quad H = R + R\sin\delta \approx 1.7\, R$$

$$x = \frac{1.7}{2} \approx 0.85$$ небесной сферы он видел.

Считаем, что спиральные галактики распределены равномерно по объему => $N \sim d_{MAX}^3$ d_{MAX} – максимальное расстояние, на котором располагается галактика, чтобы в ней можно было видеть звёзды с нашего телескопа.

$$\frac{N}{d_{MAX}^3} = \frac{N_{спир}}{d^3_{Мессье}\cdot x} \Rightarrow N = \frac{N_{спир}}{x}\cdot\left(\frac{d_{MAX}}{d_{Мессье}}\right)^3$$

$$\left(\frac{d_{MAX}}{d_{Мессье}}\right)^2 = 10^{-0.4(m_{lim} - m_{lim0})}$$

m_{lim0} – предел телескопа в наше время, пусть он будет $m_{lim0} \approx 30^m$

193

② Продолжение.

$$N = \frac{28}{x} \cdot \left(10^{-0.4(14-30)}\right)^{3/2} =$$

$$= \frac{28}{0.85} \cdot 10^{-0.6(-19)} = \frac{28}{0.85} \cdot 10^{+11.4} \approx 10^{13} \text{ галактик.}$$

я считаю, что это явная
и наглая ложь.

$\boxed{\text{Ответ: } 10^{13} \text{ галактик.}}$

④ Продолжение.

=> в нашей полученной формуле надо подставлять не $r = R_{MW}$, а $R_0 = 0.5$ пк. Тогда:

$$N_* = T_0^3 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \pi \underbrace{R_0^{3/2} R_\odot^{3/2}}_{\text{вот это всё в см}^3} = (6000)^3 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \pi \cdot \left(\overbrace{0{,}5 \cdot 2}^{=1} \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 10^2\right)^{3/2} \cdot$$

$$\cdot \left(695000 \cdot 10^3 \cdot 10^2\right)^{3/2} =$$

$$= 10^9 \cdot 6^3 \cdot \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \cdot \left(10^{18} \cdot 1{,}5\right)^{3/2} \cdot \left(10^{11}\right)^{3/2} \approx 10^9 \cdot 10^{29 \cdot \frac{3}{2}} \cdot \frac{6^3 \cdot 4\pi}{\sqrt{2}} \approx$$

$\approx 10^{9+45+3} \approx 10^{57}$ фотонов. от одной звезды.

=> $N_\Sigma = 10^{11} N \approx 10^{68}$ фотонов в галактике.

$\boxed{\text{Ответ: } 10^{68} \text{ фотонов}}$