Шифр. $\boxed{82}$

① Обозначим нашу зависимость как $\Delta\varphi(t)$

Видно, что $\Delta\varphi(t)$ возрастает, о периодичности её ничего сказать нельзя.

Для начала поймём, от чего возникает поправка к φ (фазовому углу). Очевидно, что из-за того, что наблюдаемая и предполагаемая освещенность не совпадают, то есть объект не сферический, ~~т~~ имеет неодинаковое альбедо и т.д.

$\Delta T_0 = 500$ дней по оси времени это $\Delta l_0 = 3.05$ см

наблюдения проводятся каждые $\Delta l = 2.2$ см, что соответствует промежутку в днях

$$\Delta T = \frac{2.2}{3.05} \cdot 500 = \frac{1100}{3.05} \approx 350 \text{ дней.}$$ (примерно каждый год)

Возможно, что эта модель неправильная, но этот промежуток выбран не случайно.

Построим таблицу:

t, days	$\Delta\varphi(t)$, см	$\Delta\varphi^\circ(t)$
0	0	0
ΔT	0.5	18°
$2\Delta T$	1.6	57°
$3\Delta T$	3.7	142°
$4\Delta T$	6.2	221°

каждые 50° это 1.4 см

$50 \cdot \frac{5}{14} = \frac{250}{14} = \frac{280-30}{14} = 20 - 2 - \frac{2}{14} \approx 18^\circ$

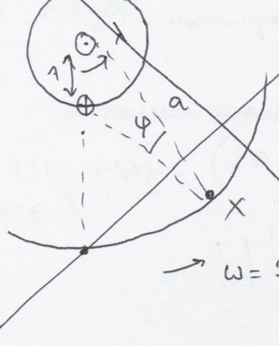
$50 \cdot \frac{16}{14} = \frac{800}{14} = \frac{700+100}{14} = 50 + \frac{28+28+28+28}{14} - \frac{12}{14} = 50 + 8 - 1 = 57^\circ$

$45 - 28 = 17$

$50 \cdot \frac{37}{14} = 100 + \frac{450}{14} = 100 + 20 + \frac{170}{14} = 100 + 20 + 10 + 2$

$50 \cdot \frac{62}{14} = 50 \cdot \frac{31}{7} = 200 + 50 \cdot \frac{3}{7} = 200 + \frac{150}{7} = 200 + 20 + 1$

~~Зависимость фазового угла от времени ищется просто:~~



~~Будем считать орбиту астероида круглой, тогда угол $\oplus \odot X = \lambda$ меняется как (X – астероид)~~

~~$\lambda = \omega t$~~

~~$\omega = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ас}}\right)$~~

Лист 2/8

1

$$\oplus X = \sqrt{1+a^2-2a\cos\lambda}$$

$$\omega = \frac{360°}{\text{год}}\left(1-\frac{1}{a^{3/2}}\right)^{-1}$$

относительная скорость вращения

$$\frac{\sin\lambda}{\oplus X} = \frac{\sin\varphi}{1}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(\omega t)}}\right)$$

тогда зависимость имеет вид:

$$\varphi(t) = \Delta\varphi(t) + \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{360°}{\text{год}}\frac{a^{3/2}}{a^{3/2}-1}t\right)}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\left(\frac{360°}{\text{год}}\cdot\frac{a^{3/2}}{a^{3/2}-1}t\right)}}\right),$$ где a – большая полуось (радиус в нашем случае) орбиты астероида.

$[a] =$ а.е.

А теперь начинается самое страшное, потому что надо понять, как вообще фазовый угол φ зависит от вращения астероида.

Астероид находится на том же месте, но имеет ~~другую~~ ~~яркость~~ другой блеск.

из-за фазы $\Phi = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}$

Предположим, что на астероиде есть какое-то пятно с маленьким альбедо, которое уменьшает фазу, а значит увеличивает фазовый угол. с $\varphi(t)$ до $(\varphi+\Delta\varphi)(t)$

$$\cos(\varphi+\Delta\varphi) = \cos\varphi\cos\Delta\varphi - \sin\varphi\sin\Delta\varphi < \cos\varphi$$

Тогда изменение фазы будет

$$\Delta\Phi = \Phi(\varphi) - \Phi(\varphi+\Delta\varphi) = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi(1-\cos\Delta\varphi) - \sin\varphi\sin\Delta\varphi\right) =$$

$$\cos\varphi = 2\Phi_\varphi - 1$$
$$\sin\varphi = \sqrt{1-(2\Phi_\varphi-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2\Phi_\varphi-1)(1-\cos\Delta\varphi) - \sqrt{1-(2\Phi_\varphi-1)^2}\sin\Delta\varphi\right]$$

Обозначим $\Phi(\varphi)$ как просто $\Phi < 1$ если астероид ~~близко, то~~ далеко (дальше 2 а.е.), то Φ всегда около 1, поэтому примем $\Phi_\varphi = 1$ и забьём.

$$\Rightarrow \Delta\Phi \approx \frac{1}{2}(1-\cos\Delta\varphi)$$

$\Delta\varphi(t)$ сильно напоминает $\arcsin(at)$, убедимся в этом

ДАЛЬШЕ на ЛИСТЕ 6!!!

Лист 3/8

82

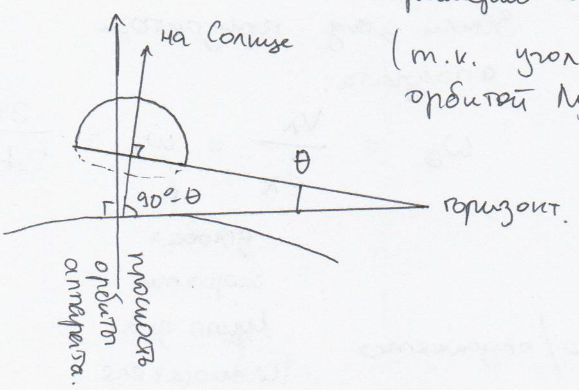
(2)

Что необходимо учесть: 1) движение самого аппарата.
2) движение ~~Земли~~ Луны вокруг Земли.

Заметим, что угол между горизонтом для аппарата и направлением на Солнце составляет:

$90^\circ - \theta = 90^\circ - 10^\circ \approx 80^\circ$, что означает, что аппарат вращается примерно в плоскости орбиты Луны. (т.к. угол между эклиптикой и орбитой Луны меняется в пределах от $-i-\varepsilon$ до $+i+\varepsilon$ где $i \approx 5.1^\circ$; $\varepsilon \approx 23.5^\circ$, значит он меняется в пределах от -28.6° до $+28.6^\circ$, что

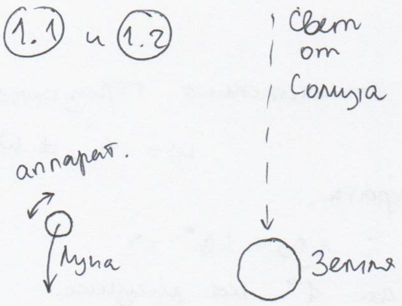
Рисунок:

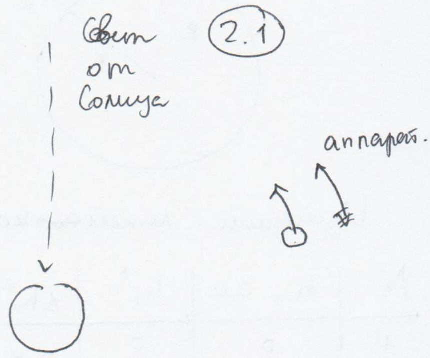


дает нам возможность сказать, что аппарат с точностью ~30° лежит ~~на орбите~~ в плоскости орбиты Луны и там летает.

Теперь определимся с геометрией:

В задаче вылезают сразу 2 основных случая:





(1.1) ~~Лу~~ Луна растущая, аппарат из-за нее вылетает.

(1.2) Луна растущая, аппарат влетает за нее, но скорость Земли на его небе больше скорости повышения горизонта, поэтому земля на его небе восходит.

(2.1) Луна ~~от~~ убывает по фазе для Земли, аппарат вылетает из-за нее.

82

2

Угловой размер Земли на небе аппарата:
(считаем его орбиту ~~сразу~~ много меньше расстояния до Земли, т.к. горизонт почти плоский, а значит аппарат близко к Луне)

$$\rho = \frac{2R_\oplus}{d_Л} \approx \frac{2\cdot 6400\,км}{386000\,км} = \frac{32}{965} = \frac{32}{1000}\cdot\frac{1000}{965} \approx$$

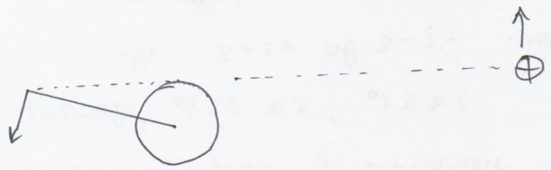
(в радианах)

$$\approx 0.032\cdot\left(1-\frac{35}{1000}\right) = 0.031 \text{ радиана} = 1.8°$$

Скорость поднятия Земли над горизонтом аппарата:

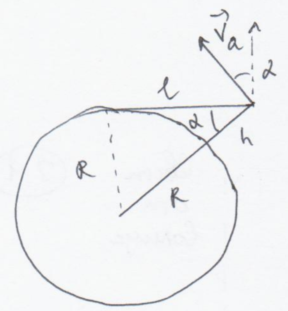
$$\omega_\oplus = \frac{v_Л}{d_Л} = \omega_Л = \frac{2\pi}{27.3\,сут}$$

угловая скорость Луны для наблюдателя в центре Земли



Для аппарата горизонт поднимается/опускается со скоростью:

$$v_a = \sqrt{\frac{GM_Л}{R+h}}$$



$$\omega_0 = \frac{v_a\cos\alpha}{\sqrt{(R+h)^2-R^2}} \ominus; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2-R^2}}{R+h}$$

$$\ominus \quad \frac{v_a}{R+h} = \sqrt{\frac{GM_Л}{(R+h)^3}}$$

Итоговая скорость Земли относительно горизонта

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_\oplus$$

Измерим линейкой изменение высоты аппарата.

N	h, см	h,°	Δh,°
1	0	0	
			0.4
2	0.4	0.4	
			0.4
3	0.8	0.8	
			0.3
4	1.1	1.1	
			0.4
5	1.5	1.5	
			0.4
6	1.9	1.9	

$\langle\Delta h\rangle = 0.38°$

Диаметр Земли $\Delta l_0 = 1.8$ см; $\Delta\rho_0 = 1.8°$ => в 1 см 1° на рисунке.

$$\Rightarrow \omega_{ср} = \frac{\langle\Delta h\rangle}{t}\Big|_{t=8с} = \frac{0.38°}{8\,сек} \approx \cancel{4.8} \; 0.48°/сек.$$

$$\omega_\oplus = \frac{360°}{27.3\cdot3600\cdot24\,сек} = \frac{0.1°}{24\cdot27.3\,сек} \ll \omega_{ср},$$

скорость поднятия Земли над горизонтом можно не учитывать.

Лист 5/8

82

(2)

$$0.48°/\text{сек} = \sqrt{\frac{GM_Л}{(R+h)^3}} \cdot \frac{360}{2\pi}$$

$\omega_{ср}$

R – радиус Луны.

$$\left(\frac{\omega_{ср} \cdot 2\pi}{360°}\right)^2 = \frac{GM_Л}{(R+h)^3}$$

$$h = \left(\frac{GM_Л \cdot (360°)^2}{4\pi^2 \cdot \omega^2_{ср}}\right)^{1/3} - R_Л =$$

$$= \left(\frac{6.67\cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{81} \cdot 6\cdot 10^{24} \cdot 360^2}{4\cdot \pi^2 \cdot 0.48^2}\right)^{1/3} - 1740\text{ км} =$$

$$= \left(\frac{6.67 \cdot 4^2 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^{24-11}}{4 \cdot 3.1^2 \cdot 0.48^2}\right)^{1/3} - 1740\text{ км} =$$

$$= 10^5\text{ м} \cdot \left(\frac{6.67 \cdot 4^2 \cdot 6}{4 \cdot 3.1^2 \cdot 0.48^2}\right)^{1/3} - 1740\text{ км} =$$

$$= 10^5\text{ м} \left(\frac{6.67 \cdot 24}{9.8 \cdot 0.48^2}\right)^{1/3} - 1740\text{ км} =$$

$$= 100\text{ км} \left(\frac{160}{0.48^2 \cdot 9.8}\right)^{1/3} = 40\ 1740\text{ км} =$$

$$= 4000\text{ км} - 1740\text{ км} \approx 2260\text{ км} \approx 2300\text{ км}$$

$\boxed{\text{Ответ: 2300 км}}$

$81 = 3^4$

$\frac{360^2}{81} = 40^2$

$10^{24-11+2} = 10^{15}$

$\sqrt[3]{10^{15}} = 10^5$

$\pi^2 \approx 9.8$

$6.67 \cdot 24 = \left(6 + \frac{2}{3}\right) \cdot 24 =$

$= \frac{20}{3} \cdot 8 \cdot 3 =$

$= 160$

Лист 6/8

(1) продолжение.

$$\Delta\Phi\big|_0 = \boxed{0}$$

$$\Delta\Phi\big|_{\Delta T} = \frac{1}{2}\left(1-\cos 18^\circ\right) =$$

$$= \cancel{\tfrac{4}{2}}\ \cancel{180}\ \left(\frac{18}{180}\cdot\pi\right)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{9.8}{100}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$\simeq \boxed{0.025}$$

$$\Delta\Phi\big|_{2\Delta T} = \frac{1}{2}\left(1-\cos 57^\circ\right) \approx \frac{1}{2}\left(1-\cos 60^\circ \cancel{\cos 3}^{\,1} + \sin 60^\circ \sin 3^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{180}\cdot\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9.3\cdot\sqrt{3}}{360\cdot 2} = \frac{1}{4} + 0.02 = \boxed{0.27}$$

$$\approx \frac{10\sqrt{3}}{720} = \frac{\sqrt{3}}{72} \approx \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{100} = 0.0186\cdot\frac{4}{3} =$$

$$= 0.02$$

$$\Delta\Phi\big|_{3\Delta T} = \frac{1}{2}\left(1-\cos 142^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos 38^\circ\right) \ominus$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7\pi}{180^\circ}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{0.8}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+0.4\cdot 1.414\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+4\cdot 0.1414\right) = 0.5\cdot(1+0.5656) =$$

$$= \frac{1.5656}{2} = 0.78$$

$$\Delta\Phi\big|_{4\Delta T} = \frac{1}{2}\left(1-\cos 221^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos 41^\circ\right) = 0.78$$

т.к. $\Delta\varphi(t)$ похожа на arcsin, и ожидаю, что $\arcsin(at)$

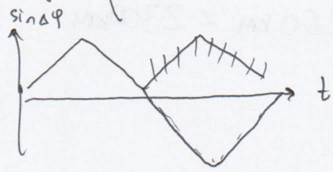
$$\Delta\Phi(t) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(at)^2}\right)$$

$$\Rightarrow -2\Delta\Phi + 1 = \sqrt{1-(at)^2}$$

$$(1-2\Delta\Phi)^2 = 1-(at)^2$$

$$\cancel{at = \sqrt{1-(1-2\Delta\Phi)^2} = \sqrt{1-(1-2}}$$

$at = \sin\Delta\varphi$ линейна.



t	$\sin\Delta\varphi$
0	0
ΔT	0.31
$2\Delta T$	0.91
$3\Delta T$	0.63
$4\Delta T$	-0.77

$$\sin 18^\circ = \frac{18}{180}\cdot\pi = \frac{\pi}{10} = 0.31$$

$$\sin 57^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 3^\circ - \sin 3^\circ\cdot\cos 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0.05}{2} \ominus$$

$$\sqrt{3} - 0.05 = 1.87 - 0.05 = 1.82$$

$$\ominus\ 0.91$$

$$\sin 142^\circ = \sin 38 =$$

$$= \sin 30^\circ\cos 8 + \sin 8^\circ\cos 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{8\pi}{180} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{14} + \frac{1}{2} = 0.63$$

$$\frac{8\pi}{180} \approx \frac{25}{180} = \frac{5}{36} = \frac{5}{35}\cdot\left(1 \mp \frac{1}{36}\right) =$$

$$= m \qquad \frac{187}{14} = 10 + 2 + 1$$

$$\sin 221^\circ =$$

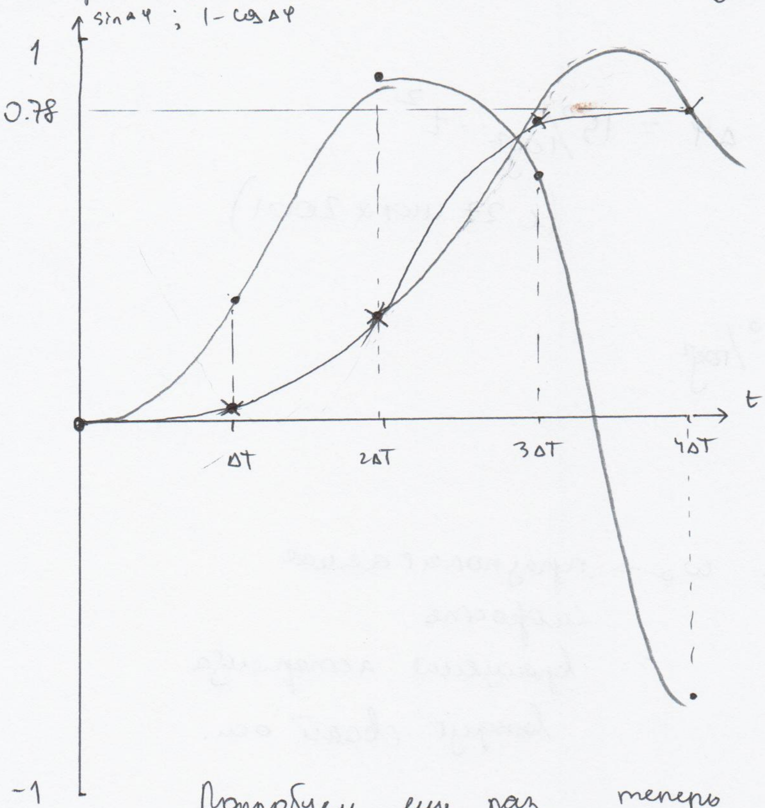
$$= -\sin 41^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sin 4^\circ\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{4\pi}{180}\right)$$

Лист 7/8

82

(1)

Построим $\sin\Delta\varphi(t)$.



Это грустно, ~~он~~ она нелинейная. ☹ (точечки)

Попробуем ещё раз, теперь построим $(1-\cos\Delta\varphi)(t) = f(t)$ там же. (крестики)

t	$f(t)$
0	0
ΔT	0.025
$2\Delta T$	0.27
$3\Delta T$	0.78
$4\Delta T$	0.78

значит $(1-\cos\Delta\varphi)(t) \approx 0.78\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{8\Delta T}t\right)\right)$

$$\cos\Delta\varphi = 0.22 + 0.78\cos\left(2\pi\frac{t}{8\text{лет}}\right),$$

что не очень правильно.

Прекрасно. Значит все это я написал зря, потому что жюри сказали, что фазовый угол это просто выделенный в пространстве угол между каким-то направлением и и каким-то направлением на астероиде.

Астероид вращается неравномерно из-за:

- ~~сил~~ наличия спутника
- наличия взаимодействия с в планетами.

возможно, что это один из троянцев, которого раскручивает в потенциальной яме ~~Юпитера~~. (у одной из точек Лагранжа)

Лист 8/8

Забьем на всё и ~~апт~~ аппроксимируем параболой, потому что можем! (поправка следующего порядка)

$\Delta t^2/\Delta T^2$	$\Delta\varphi$	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t^2}$
0	0	—
1	18	18
4	57	14
9	142	14
16	221	14

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi = 15^\circ/\text{год}^2 \cdot t^2$$

(с 27 июля 2001)

$$\left\langle \frac{\Delta\varphi}{\Delta t^2} \right\rangle = \frac{14\cdot 3 + 18}{4} = \frac{60}{4} = 15^\circ/\text{год}^2$$

Тогда зависимость имеет вид:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + 15^\circ/\text{год} \cdot t^2$$, где ω_0 – предполагаемая скорость вращения астероида вокруг своей оси.

можно оценить ω_0 как:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 3\sqrt{\frac{1}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 500}} = 3\sqrt{\frac{2}{10^{-8}\cdot 7}} = 1.8\cdot 10^4\ c$$

$\downarrow$ т.к. $\quad \rho \approx 500\ \text{кг/м}^3$

$\downarrow$ средняя плотность каменных астероидов.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}; \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3.1}{1.8\cdot 10^4\ c} = \frac{2\cdot 3.1\cdot 3.1\cdot 10^7\ c/\text{год}}{1.8\cdot 10^4\ c} = 10^5\ ^\circ/\text{год}$$

↳ предполагаемая линей скорость вращения астероида.

$\Rightarrow$ Итоговая зависимость:

$$\boxed{\varphi(t) = 1\cdot 10^5\ ^\circ/\text{год}\cdot t + 15^\circ/\text{год}^2 \cdot t^2}$$

Ещё раз говорю, что ~~мы~~ можно и нужно <u>не читать</u> все попытки связать фазовый угол с ~~освещённостью~~ фазой и освещённостью астероида, т.к. они в корне <u>неверны!</u>

Астероид скорее всего имеет неправильную форму и его раскручивает потенциальная яма около какой-то планеты или близость к точке L_4 или L_5 планет-гигантов $\Rightarrow$ ω меняется (примерно линейно)