лист 1

№4

Хотя бы иногда оказывается над горизонтом: $h_в \geq 0$ ← высота в верхней кульминации должна быть $\geq 0°$. „Иногда" = звезда не всегда наблюдается даже на горизонте т.е. нужно учесть, что она может наблюдаться только за счёт рефракции.

ρ = рефракция $\approx 0{,}5°$ φ – широта Петербурга $\approx 60°$

$h_в \geq 0$; $h_в = 90 - \varphi + \delta_{min} + \rho$ $\delta_{min} = \varphi - 90 - \rho = 60 - 90° - 0{,}5° = -30{,}5°$

тогда диапазон значений склонений звёзд которые могут наблюдаться в Пчеоре $\Rightarrow \delta_1 \in [-30{,}5°; 90°]$

„Всегда оказывается в верхней кульминации к северу от зенита" – звезда, несмотря на то, что рефрак. её „приподнимает" над гор., всё равно оказ. вается к северу. Запишем: $h_в = 90 + \varphi - \delta_{max} + \rho = 90$ $\delta_{max} = \varphi + \rho = 60{,}5°$

$h_в = 90 - |\varphi - \delta|$
$= 90 + \varphi - \delta$, когда к сев. от зенита

$h_в \geq 90$ ~~$h_в = 90 - \varphi + \delta_{max} + \rho$ $\delta_{max} = \varphi - \rho = 59{,}5°$~~

тогда диапазон значений склонений звёзд, которые всегда наблюдаются к сев. будет: $\delta_2 \in [60{,}5; 90]$

Теперь нам нужно найти долю звёзд, которые будут кульминировать всегда к сев.: длина диап. $\delta_2 = 29{,}5°$

длина диап. $\delta_1 = 120{,}5°$

тогда:

$$\eta = \frac{29{,}5}{120{,}5} \approx 0{,}2448 \approx 0{,}245$$ ← это и есть искомая доля.

```
 2950 |1205
-2410 |0,2448
  5400
 -4820
   5800
  -4820
    9800
   -9640
```

и

лист 2

№1

~~Пусть~~ R – радиус орбиты спутника

$R_\oplus$ – радиус Земли. h – высота спутника над гор.

рис. 1

По теореме синусов!

$$\frac{R}{\sin(90+h)} = \frac{R_\oplus}{\sin\gamma} = \frac{R}{\cos(h)}$$

$$\sin\gamma = \frac{R_\oplus}{R}\cos(h)$$

$$h = 40° = \frac{40\cdot\pi}{180} \text{ рад} \approx \frac{40}{60} \text{ рад} \approx \frac{2}{3} \text{ рад}$$

$$\cos(h) \approx 1 - \frac{h^2}{2} = 1 - \frac{(2/3)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\sin\gamma = \frac{R_\oplus}{R}\cdot\frac{7}{9}$$

углы в радианах

$$\alpha = \pi - \gamma - (\pi/2 + h) = \pi/2 - h - \gamma = \frac{\pi}{\cancel{8}}$$

α – ~~разное~~ дуга между двумя точками, над одной из которых находится спутник и он наблюдается в зените и другой, где спутник наблюдается на высоте 40°. Тогда, вдоль большого круга, что нарисован на картинке, должно быть $\frac{2\pi}{\alpha}$ спутников, чтобы во всех точках были спутники, которые наблюдаются на высоте 40° и больше.

Тоже самое со спутниками, которые должны наблюдатся вдоль большого ~~круга, перпе~~ круга, перпендикулярного ~~перпендикулярного~~ изображённому на рис.1 (там будет также ситуация и там тоже понадобится $\frac{2\pi}{\alpha}$ спутников. Тогда общее число спутников можно оценить как $\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{\alpha^2} = N$

$$N = \frac{4\pi^2}{\alpha^2} = \frac{4\pi^2}{(\pi/2 - h - \gamma)^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4\pi^2}{N} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{N}} = \frac{\pi}{2} - h - \gamma$$

~~Sin(...)~~ $\sin\gamma(R)$ — убывающая функция, т.е. чем выше спутник тем меньше γ и больше α. т.е. чем выше спутники, тем меньше их нужно, чтобы они покрывали всю Землю.

№1 (продолжение)

минимальное кол-во спутников получится тогда, когда высота орбиты будет достаточной, чтобы считать спутник очень далёким телом.

тогда

$\alpha \approx 60° \; (\pi/3)$, т.к. направление луча зрения ~~из~~ на спутник из двух точек почти не изменяется.

тогда $N = \frac{4\pi^2}{\alpha^2} = \frac{4\pi^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{\pi^2}{9}} = 9 \cdot 4 = 36$ шт.

~~стацг~~ $\sin(0) = 0$, поэтому если мы подставим ~~$\frac{\pi}{2}$~~ вместо γ ~~→~~ 0, то не сможем найти R. Поэтому возьмём какой-нибудь ~~очень~~ маленький угол. ~~$\frac{\pi}{2} - \alpha$~~ $= \gamma = 0{,}5°$ ~~сравним с~~

$\cos(h)$

$$\sin 0{,}5 \approx 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{120} = \frac{R_\oplus}{R} \cdot \frac{7}{9}$$

$$R = \frac{120}{9} \cdot 7 R_\oplus \approx \frac{40}{3} \cdot 7 R_\oplus \approx 13{,}3 \cdot 7 R_\oplus \approx 93 R_\oplus$$

$$\begin{array}{r} 13{,}3 \\ \times \quad 7 \\ \hline 93{,}1 \end{array}$$

$93 : 59 = 1{,}56$; $93 - 59 = 340$; $340 - 295 = 450$

Это больше орбиты Луны. $(59 R_\oplus)$

$a_☽ \approx 380000$ км.

$R_\oplus \approx 6400$ км

$\frac{a_☽}{R_\oplus} \approx 59$

$380 : 64 = 59$; $380 - 320 = 600$; $600 - 576 = 24$

Это достаточно много, возможно стоило взять γ более крупным, например 10, ~~чтобы α было 50~~ конечно тогда бы понадобилось больше спутников, но когда они далеко тоже не очень хорошо. более разумно было бы, наверное, расположить их на геостац. орбите. тогда бы понадобилось бы $N = \frac{4\pi^2}{\left(\frac{43 \cdot \pi}{180}\right)^2} = \frac{4 \cdot 180^2}{41^2}$ ← вычисл.

насчитать

$$R = \frac{93}{59} a_☽ \approx 1{,}6\, a_☽$$

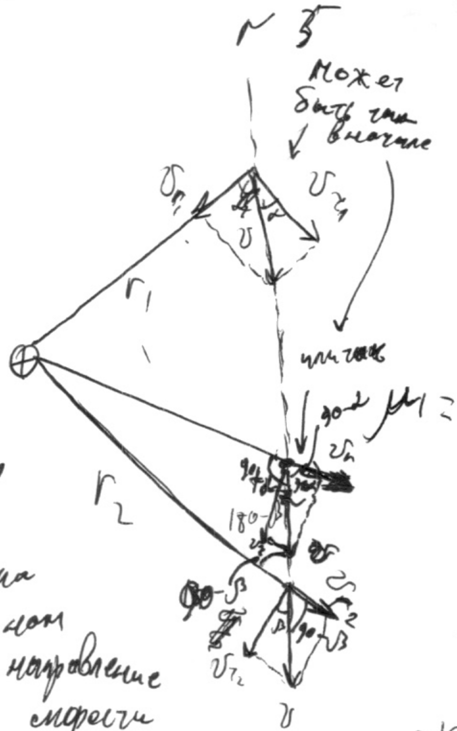
$$\begin{array}{r} 27{,}5 \\ \times \quad 1{,}9 \\ \hline 2475 \\ 275 \\ \hline 52{,}25 \end{array}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T_☽^2}{a_☽^3} \qquad \cancel{T = T_☽ \sqrt{\left(\frac{a_☽}{R}\right)^3} = T_☽ \sqrt{\left(\frac{1}{1{,}6}\right)^3}}$$

$$T = T_☽ \sqrt{\left(\frac{R}{a_☽}\right)^3} = T_☽ \sqrt{(1{,}6)^3} = T_☽ (1 + 0{,}6)^{3/2} \approx T_☽ \left(1 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}6\right) = T_☽ \cdot 1{,}9 \approx 52 \text{ дня.}$$

№ 5

v_τ — тангенц. скорость зв.
v_r — лучевая. v — полная
μ — собств. угл. движ. звезды



из рисунка видно, что нам не важно направление лучевой скорости вначале, т.к. при записи теоремы синусов получим $\sin(90+\alpha)=\cos\alpha$ или $\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$.

$$v_{\tau_1} = v\cos\alpha$$

$$v_{\tau_2} = v\cos\beta$$

$$\mu_i = v_{\tau_i}/r_i$$

$$\mu_1 = 4\mu_2$$

$$\mu_1 = \frac{v_{\tau_1}}{r_1} = \frac{v\cos\alpha}{r_1} = 4\cdot\frac{v_{\tau_2}}{r_2} = 4\cdot\frac{v\cos\beta}{r_2} = 4\mu_2$$

$$\frac{\cos\alpha}{r_1} = \frac{4\cos\beta}{r_2} \qquad \frac{\cos\alpha}{4\cos\beta} = \frac{r_1}{r_2}$$

Также имеем след. соотношение: из теоремы синусов:

~~$\frac{r_2}{\sin(180-\beta)} = \frac{r_1}{\sin\beta} = \frac{r_2}{\sin(90+\alpha)} = \frac{r_2}{\cos\alpha}$~~

$$\frac{r_1}{\sin(90-\beta)} = \frac{r_2}{\sin(90+\alpha)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r_1}{\cos\beta} = \frac{r_2}{\cos\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{4\cos\beta}$$

$$4\cos^2\beta = \cos^2\alpha$$

$$4 = \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 2$$

~~$\cos\alpha = \sin\beta\,\frac{r_1}{r_2}$ $\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{r_1}{r_2}$~~

~~переставляем.~~

~~$\frac{\cos\alpha}{r_1} = \frac{\sin\beta\frac{r_1}{r_2}}{r_1} = \frac{\sin\beta}{r_2} = \frac{4\cos\beta}{r_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 4$~~

~~чтобы найти β построим треуг. с тангенсом tg~~

~~измерив транспортиром получили $\beta \approx 76^\circ$~~

~~преобразуем уравнение 5:~~

~~$\frac{r_2}{r_1} = 4\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 4\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{4\cos\beta} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$~~

вначале собственное движение не нулевое $\Rightarrow \alpha \neq 90^\circ$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$r_2 = 2r_1 \Rightarrow$ звезда будет в два раза дальше $\Rightarrow$ в 4 раза менее яркой

$$E_1 = \frac{L}{4\pi r_1^2} \qquad E_2 = \frac{L}{4\pi r_2^2} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{L/4\pi r_1^2}{L/4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 4 = 10^{0.4(m_2-m_1)}$$

лист 5.

№5 (продолжение)

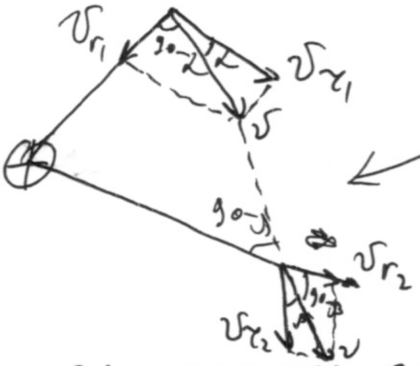
$2{,}5\lg 4 = m_2 - m_1$ $\quad m_2 = m_1 + 2{,}5\lg 4 = m_1 + 2{,}5\left(\frac{\ln 4}{\ln 10}\right) = m_1 + \frac{2{,}5}{2{,}3}(\ln 4) =$

$= m_1 + 0{,}92\left(\ln \frac{4}{10}\cdot 10\right) = m_1 + 0{,}92(\ln 0{,}4 + \ln 10) \approx m_1 + 0{,}92(-0{,}6 + 2{,}3) =$

$= m_1 + 0{,}92\cdot 1{,}7 = m_1 + 1{,}56 = 7 + 1{,}56 = 8{,}56^m$

$230 \,|\, 25$; -225; $0{,}92$; 50

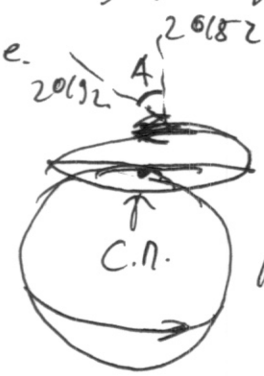
$1{,}7 \times 0{,}92$; 34; 153; $1{,}564$



новый рисунок к задаче 5, т.к. на старом всё грязно.

№2

Повторный восход наступит спустя 1 год или 365,2422 дня. т.е. в новом году это будет на 0,2422 дня позже. или на (0,2422·24)ч ≈ 5,8 часа позже.



в новом году Солнце будет наблюдаться левее от прошлогоднего положения. (см. рис.)

разницу между направлениями — угол A мы можем найти как $0{,}2422\cdot 360° \simeq 87°$ т.к. Земля ~~[illegible]~~ за сутки делает 1 оборот вокруг своей оси.

ответ! в 87° градусах левее от прошлогоднего направления.

↓

(против часовой стрелки).

лист 6

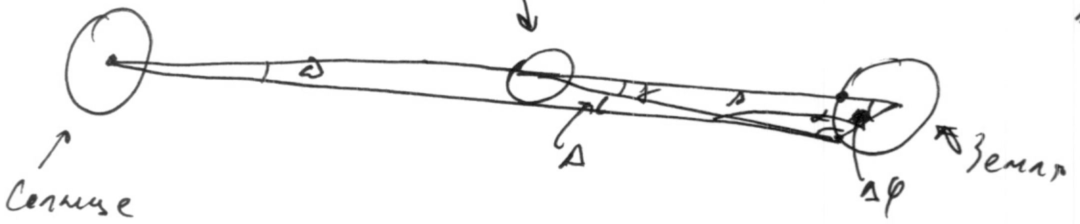
№3

$\Delta\varphi = \varphi_Г - \varphi_А = 10°$

$\Delta\lambda = \lambda_Г - \lambda_А = 0°$

⇓

затмение одновременно наблюдалось и в Алекс-и в Гелиеспонте, т.к. они на одной долготе.



$$\frac{a_1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a_1^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus a_1 \cos\Delta\varphi}}{\sin\Delta\varphi} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\Delta\varphi \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus a_1 \cos\Delta\varphi}} \approx$$

$$\approx \Delta\varphi \cdot \frac{3{,}8\cdot10^5}{\sqrt{(3{,}8\cdot10^5)^2 + (6{,}4\cdot10^3)^2 - 2\cdot}}$$

$$\frac{R_\oplus}{\sin} = \frac{a_1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a_1^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus a_1 \cos\Delta\varphi}}{\sin\Delta\varphi}$$

$$\sin\alpha \approx \Delta\varphi \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + R_\oplus^2 - 2a_1 R_\oplus \cos\Delta\varphi}} \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{3{,}84\cdot10^5}{\sqrt{(3{,}84\cdot10^5)^2 + (6{,}4\cdot10^3)^2 - 2\cdot3{,}84\cdot10^5\cdot6{,}4\cdot10^3}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{3{,}84\cdot10^5}{\sqrt{10^6(14{,}7\cdot10^4 + 41 - 49\cdot10^2)}} \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{3{,}84\cdot10^5}{\sqrt{10^6(147000 - 4900)}} \approx \frac{1}{6}\frac{3{,}84\cdot10^5}{10^3\sqrt{142000}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{3{,}84\cdot10^5}{4\cdot10^5} \approx \frac{0{,}96}{6} \approx 0{,}16 \Rightarrow \alpha \approx 180° - \left(\frac{0{,}16\cdot180}{\pi}\right) \approx$$

$$\approx 180 - 0{,}16\cdot60 \approx 180 - 9{,}6° = 170{,}4°$$

$$\frac{a_\oplus}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{a_\oplus^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus a_\oplus \cos\Delta\varphi}}{\sin\Delta\varphi}, \quad \sqrt{a_\oplus^2 + R_\oplus^2 - 2R_\oplus a_\oplus \cos\Delta\varphi} \approx a_\oplus, \text{ т.к. } R_\oplus \lll a_\oplus$$

$$\Rightarrow \beta \approx 180 - \Delta\varphi \approx 170°$$

Δ – угол между направлением на Солнце и на Луну в Александрии. $\Delta = \beta - \alpha = 0{,}4°$ фаза $\Phi = \frac{2\rho - \Delta}{2\rho} \approx \frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}5} \approx \frac{1}{5}$

ρ – угл. радиус Солнца.