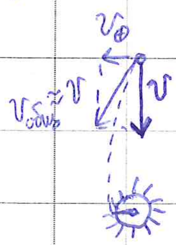
№1

Самую простую оценку можно получить из соображений, что за время полёта до Солнца составляющая скорости, перпендикулярная направлению на него, не должна продвинуть шара дальше радиуса Солнца. Поскольку шар был брошен в полдень, строго в



направлении на цент Солнца, то эта составляющая скорости равна орбитальной скорости Земли $v_\oplus \approx 30$ км/с. Считая, что скорость, с которой был брошен шар, настолько большая, что даже в гравитационном поле Солнца он движется по прямой, получаем простое соотношение:

$$\cancel{v_\oplus \frac{R_\odot}{v_\oplus} = \frac{v}{a_\oplus} = v =} \quad \frac{R_\odot}{v_\oplus} = \frac{a_\oplus}{v} \Rightarrow v = \frac{a_\oplus v_\oplus}{R_\odot} = \frac{150\cdot10^9 м \cdot 30\cdot10^3 м/с}{700\cdot10^6 м} =$$

$$= \frac{45}{700}\cdot10^8 \frac{м}{с} = 0{,}064\cdot10^8 \frac{м}{с} = 6{,}4\cdot10^6 м/с$$

Можно также оценить, насколько не верно предположение о прямолинейности траектории, используя закон сохранения энергии. Известно, что вторая космическая скорость на поверхности Солнца имеет порядок сотен километров в секунду, и этого достаточно, чтобы преодолеть всю потенциальную энергию взаимодействия с Солнцем. По полученной выше оценке скорость больше на порядок, значит кинетическая энергия больше на 2 порядка по сравнению с максимально возможным изменением потенциальной. Поэтому влияние потенциальной энергии можно не учитывать.

Однако не стоит забывать, что шар брошен с Земли, ~~и изменение~~ Изменение его скорости при покидании Земли также будет незначительным. А вот замедление вследствие силы сопротивления атмосферы ~~вполне~~, вероятно, будет значительным ~~сильно его замедлит~~. Сила при этом зависит от квадрата скорости, а значит характер зависимости будет таким:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V^2 \qquad F = C_R \frac{\rho V^2}{2} S \leftarrow \text{формула силы сопротивления}$$

C_R - коэффициент, $C_R \approx 1$, $\rho \approx 1$ - плотность воздуха $S \approx 0{,}1\,м^2$ - площадь поверхности шара. Масса шара m, предположим, порядка 10 кг.

Считая, что атмосфера состоит из воздуха одинаковой плотности и имеет высоту плотных слоёв около 10 км, получим, что это расстояние шар пройдёт примерно за:

$$t = \frac{\delta h}{V} \approx 2 \cdot 10^{-3} с.$$ Считая скорость мало меняющейся, определим ускорение:

$$a = \frac{C_R \rho S}{2m} V^2 = \frac{10^{-2}}{2} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{13} \approx 2 \cdot 10^{11}\ м/с^2$$

Изменение скорости: $\Delta V = t \cdot a = 4 \cdot 10^8\ м/с$

Очевидно, что при дальнейшем увеличении скорости ускорение будет расти пропорционально ее квадрату, а время уменьшаться линейно. И поскольку изменение скорости ~~Поскольку ускорение~~ превосходит скорость, с Земли шар не улетит, даже если увеличить скорость. Поэтому будем считать, что он запущен из космоса вблизи Земли, тогда ответом будет наша первая оценка:

Ответ: $6{,}4 \cdot 10^6\ м/с$

№3

Для начала найдём расстояние до галактики, используя закон Хаббла. Красное смещение:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{7900\text{Å} - 6563\text{Å}}{6563\text{Å}} = \frac{1337\text{Å}}{6563\text{Å}} \approx \frac{1350}{6600} \approx 0{,}2$$

Расстояние:

$$r = \frac{cz}{H} = \frac{3\cdot 10^5 \text{км/с}\cdot 0{,}2}{68\frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}} \approx \frac{3\cdot 0{,}2\cdot 10^5}{7\cdot 10} \approx 640 \text{ Мпк}$$

Далее через эффект Доплера рассчитаем орбитальную скорость вещества на окраинах диска этой галактики (будем считать, что она повёрнута к нам ребром):

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{8\text{Å}}{7900\text{Å}} \approx 0{,}001 \qquad \cancel{\Delta\lambda = \frac{16\text{Å}}{2\cdot(1+z)} = 6{,}7(\text{Å})} \quad \Delta\lambda = \frac{16\text{Å}}{2} = 8\text{Å}$$

$v = \cancel{300}\ c\cdot 0{,}001 = 300$ км/с. Красное смещение при этом действует и на саму длину волны, и на её изменение, поэтому сокращается в расчёте.

Далее, считая, что эта скорость не меняется в зависимости от расстояния до центра галактики ~~к~~ (кроме совсем близких к центру областей) и ~~зависим~~ пропорциональна радиусу Галактики, получим этот радиус, сравнивая ~~скор~~ скорость со скоростью солнечной системы в Млечном пути:

$$\frac{v}{v_\odot} = \frac{R}{R_{МП}} \Rightarrow \cancel{v = v_\odot \frac{R}{R_{МП}} = 200\text{км/с}}\cdot R = \frac{v}{v_\odot} R_{МП} = \frac{300\text{км/с}}{200\text{км/с}}\cdot 15\text{кпк} =$$

$= 22,5$ кпк $R_{МП}$ – радиус Млечного пути.

Теперь, считая ~~размер~~ объём галактики пропорциональным её радиусу в кубе, а количество звёзд – пропорциональным объёму, ~~а также зная, что в Млечном пути примерно $3\cdot10^{11}$ звёзд~~, получим:

$$\cancel{N = N_{МП}\cdot\left(\frac{R}{R_{МП}}\right)^3 =} \quad \frac{N}{N_{МП}} = \left(\frac{R}{R_{МП}}\right)^3 \approx \cancel{70000}\ 3,4$$

Светимость Млечного пути равна примерно $10^{12} L_\odot$. Считая, что светимость галактики пропорциональна количеству звёзд в ней, получаем:

$$L = 3,4\cdot L_{МП} = 3,4\cdot10^{12} L_\odot$$

Абсолютная звёздная величина галактики находится по формуле Погсона:

$$M = M_\odot - 2,5\log\frac{L}{L_\odot} = 4,8^m - 2,5\cdot\log(3,4\cdot10^{12}) \approx 4,8^m - 2,5\cdot0,5 - 2,5\cdot12 =$$

$$= 4,8^m - 30,25^m = -25,45^m$$

Видимая звёздная величина:

$$m = M + 5\log\left(\frac{r}{10пк}\right) = -22,45^m + 5\cdot\log 64 + 5\cdot\cancel{\log}\ 6 = -22,45 + 30 + 8,3 =$$

$$\approx 15,8^m$$

Ответ: $15,8^m$

№4

Поскольку взаимодействия с другими телами нет, то весь момент импульса орбитального движения Юпитера прибавится к моменту импульса Солнца.

$$m_{♃} v_{♃} a_{♃} + m_{\odot} v_{ср\odot} R_{\odot ср} = (m_{♃} + m_{\odot}) V_{ср} R_{\odot ср}$$

Оценим оба этих момента импульса.

$m_{♃} \approx \frac{m_{\odot}}{1000} = 2 \cdot 10^{27}$ кг $\quad m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг $\quad R_{\odot} \approx 700\,000$ км

$a_{♃} =$ ~~5,2 · 10~~ 5,2 а.е. ~~$v_{♃}$~~

Орбитальную скорость Юпитера можно найти, ~~пользуясь III законом Кеплера~~ зная орбитальную скорость Земли:

$$V_{♃} = \sqrt{G\frac{M_{\odot}}{a_{♃}}} \quad V_{\oplus} = \sqrt{G\frac{M_{\odot}}{a_{\oplus}}} \Rightarrow V_{♃} = V_{\oplus}\sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_{♃}}} = \frac{30 км/с}{\sqrt{5,2}} \cdot \cancel{\sqrt{5,2}} =$$

$$= \frac{30}{2,3} = 13 \text{ км/с}$$

Скорость вращения Солнца можно оценить, зная, что его период обращения $T \approx 30$ суток.

$$V_{\odot} = \frac{2\pi R_{\odot}}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 10^{5} км}{30 \cdot 24 \cdot 3600 \frac{с}{ч}} \approx \cancel{17,5 км/с}\ 1,7 \text{ км/с}$$

Для оценки не будем считать истинное значение средней скорости вращения всех слоёв Солнца, а просто примем её равной $\frac{V_{\odot}}{2} = \cancel{8,75}$ 0,85 км/с

То же самое примем для среднего радиуса $R_{\odot ср} = \frac{R_\odot}{2} = 3{,}5 \cdot 10^5$ км

Таким образом, формула для средней скорости вращения Солнца после падения Юпитера:

$$V_{ср} = \frac{m_♃ V_♃ a_♃ + m_\odot V_{ср\odot} R_{\odot ср}}{(m_♃ + m_\odot) R_{ср}} \approx \frac{m_♃ V_♃ a_♃ + m_\odot V_{ср\odot} R_{ср\odot}}{m_\odot R_{ср\odot}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{27} кг \cdot 13 км/с \cdot 5{,}2 \cdot 150 \cdot 10^6 км + 2 \cdot 10^{30} \cdot \cancel{8{,}75}\,0{,}85 км/с \cdot 3{,}5 \cdot 10^5 км}{2 \cdot 10^{30} кг \cdot 3{,}5 \cdot 10^5 км} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot 1{,}3 \cdot 5{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot \cancel{10^{35}} + \cancel{2} \cdot \cancel{8{,}75}\,0{,}85 \cdot 3{,}5 \cdot \cancel{10^{35}}}{\cancel{2} \cdot 3{,}5 \cdot \cancel{10^{35}}} \approx \frac{10 \cdot \cancel{10^{35}} + \cancel{31}\,2{,}775}{3{,}5} = \cancel{\frac{131}{3{,}5} = 37{,}4 км/с}$$

$$= \cancel{\frac{41}{3{,}5} = 11{,}7 км/с} \quad \frac{12{,}8}{3{,}5} \approx 3{,}6 км/с$$

Скорость вращения поверхности Солнца при этом в 2 раза больше:

$$V_{\odot нов} = V_{ср} \cdot 2 = \cancel{23{,}4 км/с}\ 7{,}2 км/с$$

А новый период обращения:

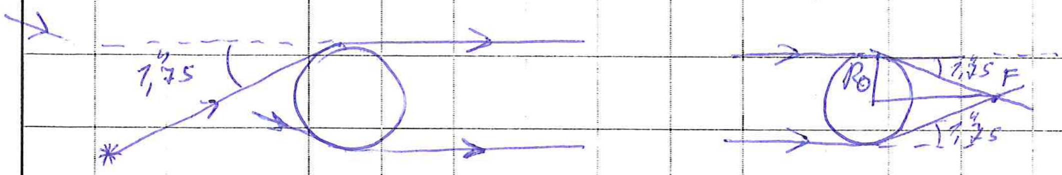
$$T_{нов} = \frac{2\pi R_\odot}{V_{\odot нов}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot 10^5 км}{\cancel{23{,}4 км/с}\ 7{,}2 км/с} = \frac{43{,}96}{\cancel{23{,}4}\ 7{,}2} \cdot 10^5 \approx \cancel{2 \cdot 10^5 с} \approx 6{,}1 \cdot 10^5 с \approx$$

$$6 \cdot 10^5 с = 167 ч \approx 7 суток$$

Ответ: 7 суток

№2

Рассмотрим ход луча некоторой звезды вблизи поверхности Солнца:



Из рисунка видно, что параллельный пучок света собирается в точку, при этом фокусное расстояние $F = R_\odot \cdot ctg(1,75'') \approx$

$\approx R_\odot \cdot \dfrac{1,75''}{206265''/радиан} = R_\odot \alpha$

То есть, оно пропорционально радиусу. А так как по условию оно обратно пропорционально массе, то $\alpha = \dfrac{\beta}{M}$. И тогда зависимость имеет вид:

$$F = \frac{R}{M}\beta$$

Найдём коэффициент β, исходя из параметров Солнца:

$$\beta = \alpha M_\odot = \frac{1,75''}{206265''/рад} \cdot 2\cdot 10^{30} кг \approx \frac{1,75}{2\cdot 10^5} \cdot 2\cdot 10^{30} = 1,75\cdot 10^{25} кг$$

Тогда итоговая формула:

$$F = 1,75\cdot 10^{30} \cdot \frac{R}{M}$$

№ 5

Во-~~ти~~первых, примем, что количество звёзд ярче 6^m равно 6000. ~~То есть~~ Это количество доступно для человеческого глаза. Но это количество звёзд на всей небесной сфере, мудрец же наблюдает лишь половину, значит количество звёзд, которые он в принципе может увидеть, примерно 600 000 000, т.е. в 2 раза больше, чем он наблюдал в задаче.

Вычислим, во сколько раз отличается количество на небе звёзд с величиной m+1 и ~~только~~ с величиной m. Для этого представим, что звёзды распределены в пространстве равномерно и имеют одинаковую светимость. Тогда ~~по формуле Погсона~~ единственным параметром, влияющим на звёздную величину, будет расстояние. По формуле Погсона можно найти отношение расстояний до звёзд с ~~отличием~~ разностью блеска в 1^m

$$1^m = 5\lg\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 10^{0,2} = \sqrt{2,512} \approx 1,6$$

Количество звёзд ярче какой-то звёздной величины будет равно количеству звёзд внутри шара, на расстоянии, равном радиусу которого и достигается эта звёздная величина. А количество звёзд внутри шара пропорционально его объёму, т.е. кубу радиуса. Тогда:

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = \left(\frac{r(m+1)}{r(m)}\right)^3 = 1,6^3 \approx 4$$

больше

Таким образом, звёзд, с величиной 8^m (7) в 4 раза больше, чем с 7^m

величиной, больше 6^m. При этом количество звёзд с величиной больше m определяется формулой:

$$n(m) = n(6^m) \cdot 4^{(m-6^m)}$$

Отсюда, поставляя количество звёзд из задачи, можно вычислить их предельную величину:

$$m = \log_4\left(\frac{n(m)}{n(6^m)}\right) = \cancel{\log_4 10^5} + 6^m = \log_4 10^5 + 6^m \approx 8{,}35^m + 6^m = 14{,}35^m$$

Отсюда несложно получить проницающую силу телескопа мудреца.
~~Учитывая, что~~ Считая диаметр зрачка глаза 6 мм, получим:

$$m_T = m_Г + 5\lg\left(\frac{D_T}{D_Г}\right) = \cancel{6^m +} \Rightarrow 5\lg\frac{D_T}{D_Г} = 8{,}35^m$$

$$\lg\frac{D_T}{D_Г} = 1{,}67 \Rightarrow \frac{D_T}{D_Г} \approx \overset{46{,}2}{\cancel{2{,}15}} \Rightarrow D_T = 277 \text{ мм} = 27{,}7 \text{ см}$$

Ответ: 27,7 см