стр 1/4 Чистовик КСБ-15

XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур

2024

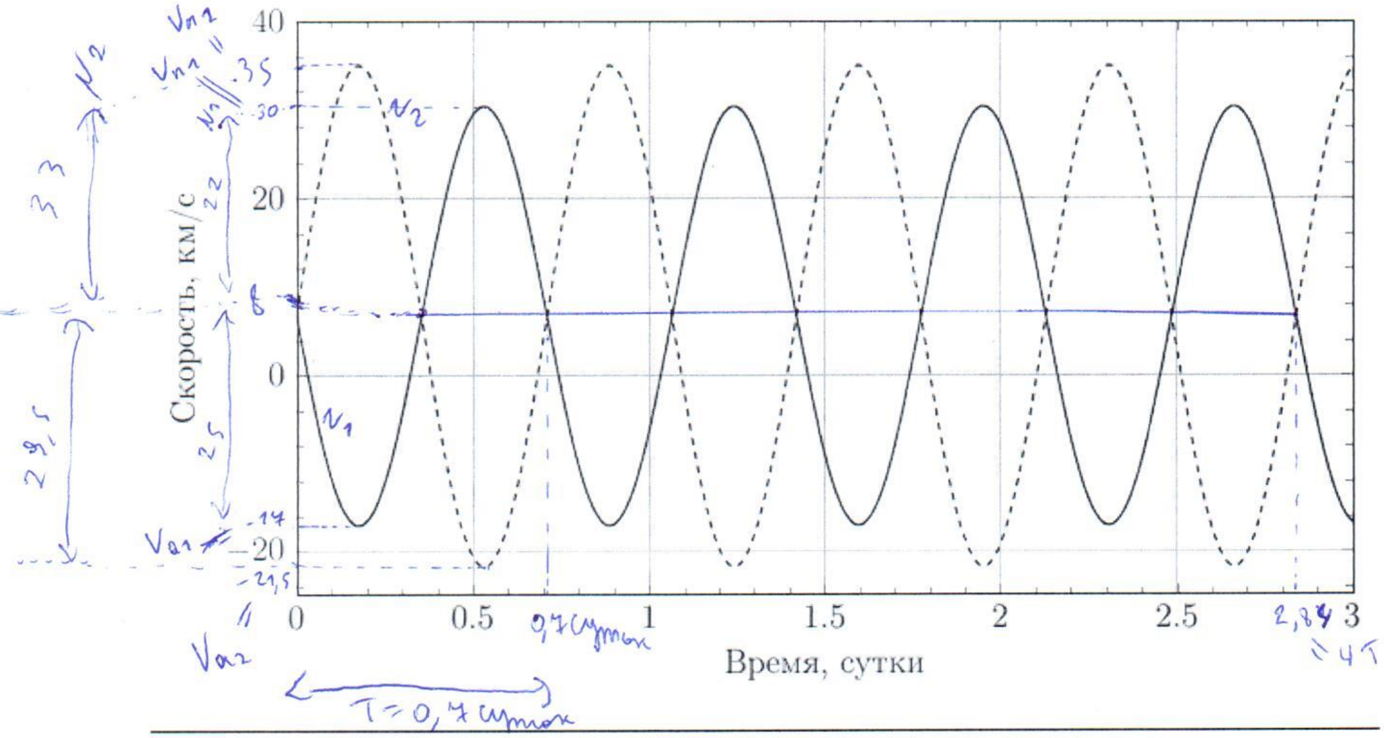
3 марта

10 класс

Вам дана кривая лучевых скоростей двойной звезды LP 413–53AB, полученная в ходе наблюдений с 2007 по 2023 годы и аппроксимированная численной моделью. По оси абсцисс отложено время в сутках, по оси ординат — лучевая скорость каждой из компонент (в км/с). Определите:

- массы компонент;
- спектральные классы звезд;
- среднее расстояние между компонентами;
- угол наклона орбиты к лучу зрения.

Полуширина спектральной линии угарного газа (CO) $\lambda = 2314$ нм в спектре звезды, кривая лучевых скоростей которой обозначена штрихованной линией, составляет 0.34 Å, в спектре звезды с кривой лучевых скоростей, обозначенной сплошной линией — 0.36 Å, ускорения свободного падения на поверхности обеих компонент равны $3 \cdot 10^5$ см/с^2. Можно считать, что оси вращения звезд перпендикулярны плоскости их орбит.



Для начала проведем анализ условия (графика) со стр 1. Найдем период системы как разницу во времени между двумя одинаковыми точками графика. Для большей точности возьмем время четырех периодов (2,84 суток по графику) и разделим на 4 $\Rightarrow T = 0,71$ суток. Также обозначим сплошной график графиком ~~зве~~ компоненты №1 и пунктирный компоненты №2. Зафиксируем максимальные и минимальные значения скорости лучевой – они соответствуют перицентру и апоцентру звезд. $V_п = V_I \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$; $V_а = V_I \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$

$$\frac{V_п}{V_а} = \sqrt{\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}} = \frac{1+e}{1-e}$$; по графику: $\frac{V_{п1}}{V_{а1}} \approx \frac{V_{п2}}{V_{а2}}$, т.к. у системы для обеих компонент эксцентриситет одинаковый.*[стр 3] $\left(\frac{V_{п1}}{V_{а1}}\right) = \left(\frac{30}{7}\right)$.

По з-ну Доплера: $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{V}{c} \Rightarrow V = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda}$

для №1: $\Delta\lambda = 0,36 \text{Å} = 0,036$ нм, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с $\Rightarrow V_1 = \frac{0,036 \cdot 3 \cdot 10^5}{2378} = 4,58$ км/с

для №2: $\Delta\lambda = 0,34 \text{Å} = 0,034$ нм; $V_2 = 4,4$ км/с

$a_{св. пад} = G\frac{M}{R^2}$; $a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{M_1}{R_1^2} = \frac{M_2}{R_2^2}$

Введем приведенную массу $\mu = f(M_1; M_2)$; ~~$\mu(M_1, M_2)$~~; Так, что μ в фокусе заменяет M для m

тогда по III з-ну Кеплера:

$$\frac{T^2(M_1+M_2)}{(a_1+a_2)^3} = Const = \frac{4\pi^2}{G} = 1$$ (в а.е,

$a_{св.п} = 3 \cdot 10^5 \, см/с^2 = 3 \cdot 10^3 \, м/с^2$ – ~~очень~~ много для звезды

Сравним с $a_\odot$: $a_\odot = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30}}{(1{,}4 \cdot 10^9)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 10^{29}} = 6{,}67 \cdot 10 = 66{,}7 \, м/с^2$

Т.к. звезды, большие, чем Солнце, имеют несильно большую массу, мы имеем дело с плотными карликами (это также можно понять по маленькому периоду компонент $\Rightarrow$ маленькому расстоянию между компонентами. $\Rightarrow$ Наши звезды – красные карлики.

по III з-ну Кеплера: $M_\odot T^2 = a^3$, в нашем случае

$\mu T^2 = a^3$, $\mu \approx M_\odot \Rightarrow T^2 = a^3$, $T = 0{,}71$ сут $= \frac{1}{500}$ года

$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{500^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25 \cdot 10^4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{250 \cdot 10^3}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{250}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6{,}3} = \frac{1}{63}$ а.е.

Т.к. ~~звезды~~ компоненты схожи (что следует из скоростей), $a = \frac{1}{63}$ а.е $= 0{,}016$ а.е – среднее расстояние

(Среднее расстояние $= \frac{a + A}{2}$, где a, A – большие полуоси компонент)

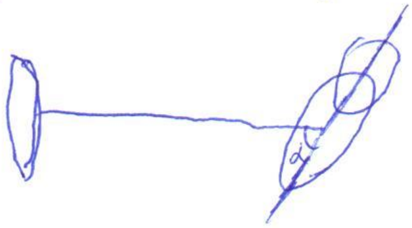
*) $\frac{V_{п1}}{V_{а1}} = \frac{30}{17} = 1{,}7647 = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow 1{,}7647 - 1{,}7647e = 1 + e$

$e = \frac{0{,}7647}{2{,}7647} = 0{,}3$

$$\begin{cases} V_{п1} = V_{I_1} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\ V_{а1} = V_{I_1} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \\ V_{п2} = V_{I2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\ V_{а2} = V_{I2} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \end{cases} \xrightarrow{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 1{,}4, \; \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \approx 0{,}7} \begin{cases} V_{пI} = \sqrt{\frac{G \mu_1}{a_1}} \cdot 1{,}4 & (1) \\ V_{а1} = \sqrt{G \frac{\mu_1}{a_1}} \cdot 0{,}7 & (2) \\ V_{п2} = \sqrt{G \frac{\mu_2}{a_2}} \cdot 1{,}4 \\ V_{а2} = \sqrt{G \frac{\mu_2}{a_2}} \cdot 0{,}7 \end{cases}$$

Из описанных выше уравнений можно найти M_1 и M_2, а т.к. $M = f(M_1, M_2)$, можно найти массу компонент, а затем, по III з-ну Кеплера, найти a_1 и a_2 и вычислить точнее среднее расстояние между компонентами. Спектральные классы соответствуют красным карликам.

Что касается угла наклона, то для начала изобразим ситуацию:



Надо найти угол α

Из ур-ний ① и ② получается, что $\frac{V_{n1}}{V_{a1}} = 2$, но по данным графика $\frac{V_{n1}}{V_{a1}} = \frac{30}{17} = 1,7644$. Так получается из-за того, что на самом деле есть угол наклона и надо отношение домножить на ~~sin~~ cos α. Тогда $2 \cdot \cancel{\sin}\cos\alpha = 1,7644$

$$\cos\alpha = \frac{1,7644}{2} \approx \frac{1,75}{2} \approx \frac{7}{8} \Rightarrow \alpha \approx 7^\circ$$