

Задача 1.

Зная относительное красное смещение, можно найти линию, на которой наблюдатель видит галактику: для первой галактики:

$$z_1 = \frac{\lambda_1 - 6563 \text{ \AA}}{6563 \text{ \AA}} \quad (\text{в линии Балмера}).$$

$$\lambda_1 = \cancel{z_1} \cdot z_1 \cdot 6563 \text{ \AA} + 6563 \text{ \AA} = 4 \cdot 6563 \text{ \AA}$$

Для второй галактики: $z_2 = \frac{\lambda_2 - 6563 \text{ \AA}}{6563 \text{ \AA}} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 6563 \text{ \AA}$

Если галактики одинаковы, то имеют одинаковые поверхностные яркости, но вот видимые поверхностные яркости (болометрические) ^{них} ~~у них~~ различаются.

По закону Хаббла найдём расстояние до первой галактики:

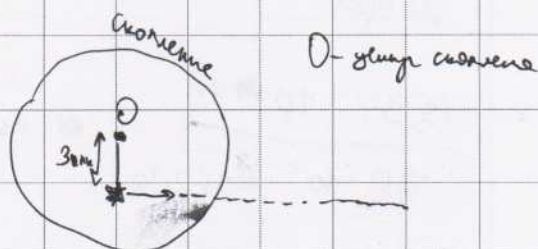
$$z_1 \cdot c = H \cdot r_1, \quad \text{где } H = 68,8 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \approx 70 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} - \text{константа Хаббла,}$$

r_1 — расстояние от наблюдателя до первой галактики
 c — скорость света в вакууме.

$$r_1 = \frac{3 \cdot 300\,000}{70} \text{ Мпк} \approx 1,3 \cdot 10^4 \text{ Мпк}$$

Для второй галактики получаем, что $r_2 = \frac{0 \cdot 300\,000}{70} \text{ Мпк} = 0 \text{ Мпк}$, это означает, что мы стоим на её центре. Поскольку наблюдатель (находящийся на Земле, по умолчанию) видит ~~зрительную~~ одновременно только половину неба, наблюдаемая болометрическая поверхностная яркость второй галактики равна $\frac{B}{2}$, где B — ~~равная~~ болометрическая поверхностная яркость (абсолютная), одинаковая для двух галактик.

Задача 2. Представим как движется звезда.



Она будет двигаться по прямой, сила действующая на неё со стороны других звезд скопления равномерно скомпенсирована (звезды одинаковы, расположены равномерно). Но потом звезда войдет за пределы скопления и тогда на неё будут действовать гравитационные силы со стороны всех звезд скопления, направленные к центру скопления (океан же. из условия равномерности расположения звезд ч их одинаковости). Давайте рассмотрим ~~на~~ вектор скорости звезды начнет ~~поворачиваться~~ поворачиваться под действием ~~пов~~ ускорения, вызванного гравитационной силой и в конце концов звезда начнет двигаться по окружности вокруг скопления на некотором расстоянии r от центра. со скоростью $v = 10 \text{ км/с}$ (скорость не меняется, т.к. ускорение, вызванное гравитационной силой меняет направление скорости, но не модуль). Тогда на звезду будет действовать гравитационная сила (будет считаться, что звезды скопления создают суммарную гравитационную силу, направленную в центр скопления, такую же создавала бы одна большая звезда с массой, равной сумме масс всех звезд скопления). Эта сила скомпенсирована равнодействующей силе.

$$G \frac{10^6 \cdot M_0 \cdot M_0}{r^2} = M_0 \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{10^6 M_0}{r} = v^2 \Rightarrow$$

$$r = \frac{G \cdot 10^6 M_\odot}{g^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{10\,000^2} \text{ (м)} =$$

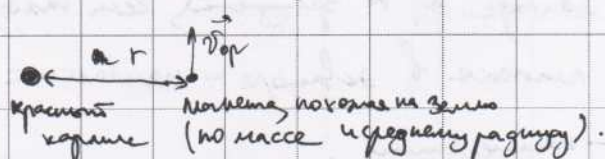
$$= 13,34 \cdot 10^{17} \text{ м} = \frac{13,34 \cdot 10^{17}}{150 \cdot 10^9 \cdot 206265} \text{ пк} \approx$$

$$\approx \frac{1,3 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^{12} \text{ пк} = 4 \cdot 10^{11} \text{ пк}$$

Мы видим, что получены ответ намного больше радиуса и диаметра скопления, значит воспользоваться указанным выше приближением (на звезду ^{в центре скопления} действует такая гравитационная сила, которая бы создавалась точечной звездой с массой $10^6 M_\odot$, находящейся в центре скопления) можно, поскольку радиус скопления намного меньше расстояния от скопления до звезды.

Ответ: $4 \cdot 10^{11} \text{ пк}$

Задача 3.



Используя ~~закон Кеплера~~ закон Кеплера в системе единиц, $M_0 - \text{масса Солнца}$, $M - \text{масса звезды}$, r — орбитальный период, $M_0 - \text{масса Солнца}$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1}{0,35 M_0 + M_0} \Rightarrow r^3 = T^2 \cdot 0,35 M_0 \quad (T - \text{в годах!})$$

очень мало

Гравитационная сила, действующая на планету со стороны красного карлика уравновешивает центробежную силу, вызванную движением планеты вокруг звезды:

$$(1) \quad G \frac{M M_0}{r^2} = M \frac{v_{\text{орбит}}^2}{r}, \quad \text{где } M - \text{масса звезды, } M = 0,35 M_0$$

~~масса планеты~~
 $v_{\text{орбит}}$ — орбитальная скорость планеты

Или, $v_{\text{орбит}}$ можно найти по-другому: $v_{\text{орбит}} = \frac{2\pi r}{T}$. Отметим, что оба последних уравнения верны для круговой орбиты.

Рассмотрим планету отдельно. Она является инерциальной, можно записать соотношение: $\frac{GM_0}{R_n} = \frac{GM_0}{R_0} + \frac{v_{\text{орбит}}^2}{2}$ (2), где $v_{\text{орбит}}$ — орбитальная скорость планеты, но есть её скорость ~~относительно~~ в системе отсчёта, связанной с центром планеты. (Это же соотношение можно получить из равенства энергий для маленького тела m , находящегося на планете,

и ~~также~~ ~~то~~ такого же тела, находящегося на экваторе: $\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} =$
 $= \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} + \frac{m\Omega_{\text{план}}^2}{2}$, т.к. тело m вращается с вращательной скоростью

планета, если находится на экваторе и не вращается, если находится на полюсе). Здесь $R_{\oplus}$ - радиус планеты в экваторе - наибольший, R_p - радиус планеты у полюса - наименьший.

Запишем момент импульса для планеты относительно её оси:

$$L = \cancel{I_{\oplus}} \cdot \omega_{\text{план}} + \left(I_{\oplus} \cdot \omega_{\text{орбит}} + \overset{0,35M_{\oplus}}{M} \cdot r^2 \right)$$

где $\omega_{\text{план}}$ -

угловая скорость вращения

планеты, $\omega_{\text{орбит}}$ -

угловая скорость вращения планеты по орбите (с этой же по модулю

угловой скоростью вращается звезда вокруг планеты в системе отсчета

связанной с планетой)

$I_{\oplus}$ - момент инерции Земли, $I_{\text{зв}}$ - момент инерции звезды.

Оба тела можно считать шариками (для этого случая такое упрощение подойдет для планеты). Тогда $I_{\oplus} = \frac{2}{5} M_{\oplus} R_{\oplus}^2$, $I_{\text{зв}} = \frac{2}{5} 0,35 M_{\oplus} R_{\oplus}^2$

$$\omega_{\text{орбит}} = \frac{v_{\text{орбит}}}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

Если мы "поменяем" центральную звезду на Солнце, то изменится расстояние r до планеты, при этом L сохранится:

Для системы Солнце - Земля:

$$L = I_{\oplus} \cdot \omega_{\text{план}_2} + (I_{\oplus} \cdot \omega_{\text{орбит}_2} + M_{\oplus} \cdot a^2), \text{ где } a = 1 \text{ а.е.}$$

$$\omega_{\text{вращ}} = \frac{2\pi}{365 \text{ дней}} = \frac{2\pi}{365 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ с}}$$

~~ω_{вращ}~~

$$\omega_{\text{вращ}} = \frac{2\pi}{24 \text{ часа}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}}$$

Оценим радиус звезды через равную плотность. Поскольку звезда — это красный карлик, её плотность не сильно отличается от плотности Солнца. Тогда $\frac{0,35 M_{\odot}}{R_{\text{зв}}} = \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}}$, $R_{\odot} = 700\,000 \text{ км}$

$$R_{\text{зв}} = 0,35 R_{\odot} = 0,35 \cdot 700\,000 \text{ км}$$

Найдем ω_{вращ}, приравняв L. Согласно ур-нию

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} M_{\odot} R_{\odot}^2 \cdot \omega_{\text{вращ}} + \frac{2}{5} \cdot 0,35 M_{\odot} \cdot 0,35^2 R_{\odot}^2 \cdot \frac{2\pi}{T} + 0,35 M_{\odot} r^2 = \\ & = \frac{2}{5} M_{\odot} R_{\odot}^2 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} + \frac{2}{5} M_{\odot} R_{\odot}^2 \cdot \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} + M_{\odot} \cdot a^2 \end{aligned}$$

Здесь неизвестна только ω_{вращ}. Как раз она нам необходима, чтобы получить $\sigma_{\text{вращ}} = \omega_{\text{вращ}} \cdot R_{\text{зв}}$, и подставив в ур-ние (2), получить искомый ответ.

$$M_{\odot} = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$$

$$R_{\odot} = 640\,000 \text{ км} \quad 6,4 \cdot 10^3 \text{ км}$$

$$R_{\odot} = 700\,000 \text{ км} \quad 7 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Давайте остановимся на первом и подумаем, какими уравнениями мы располагаем:

(1.0) Эквипотенциальность: ~~1.0~~

$$\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = \frac{GM_{\oplus}}{R_3} + \frac{v_{\text{вращ}}^2}{2}$$

перевод: $v \rightarrow v_{\text{вращ}} = \omega_{\text{вращ}} \cdot R_3$

Орбитальная скорость: $v_{\text{орбит}} = \omega_{\text{орбит}} \cdot r$

r можно найти из 3-го закона Кеплера: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{1}{0,35 M_{\odot}}$

$$\omega_{\text{орбит}} = \frac{2\pi}{T}$$

, где T - орбитальный период.

$$\omega_{\text{вращ}} = \frac{2\pi}{t}, \text{ где } t - \text{осевой период.}$$

Нам необходимо связать орбитальный и осевой период или орбитальную и вращательную скорости

$$\frac{v_{\text{орбит}}}{v_{\text{вращ}}} = \frac{\frac{2\pi}{T} \cdot r}{\frac{2\pi}{t} \cdot R_3} = \frac{r}{R_3} \cdot \frac{t}{T}$$

Сделаем предположение, что $\frac{t}{T} = \frac{R}{r}$, где R - средний радиус планеты.

Проверим, работает ли аналогия Земли, вращающейся вокруг Солнца?

$$\frac{365 \text{ сут}}{1 \text{ сут}} = \frac{6,4 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^{11}} \quad \text{не работает}$$

$$\text{То же предположение: } \frac{T}{t} = \frac{r}{R} : \frac{365}{1} = \frac{1,5 \cdot 10^{11}}{6,4 \cdot 10^6} \approx 2,3 \cdot 10^4 > 10^2 = 10^5, \text{ что неверно, что}$$

~~Давайте работать в приближении~~

$$\text{Если да, } T=t, \text{ то } v_{\text{вращ}} = \frac{2\pi}{t} \cdot R_3 = \frac{2\pi R_3}{T},$$

Пусть $R_2 = n \cdot R_1 = n \cdot b$
 Тогда :

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{nb} = \frac{4\pi^2 n^2 b^2}{2GM_\oplus T^2} \quad | \cdot b$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{4\pi^2 n^2 b^3}{2GM_\oplus T^2} \quad | : n^3$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} = \frac{4\pi^2 b^3}{2GM_\oplus T^2}$$

Кроме того мы знаем: $\frac{R_2 + R_1}{2} = R_\oplus$
 средний радиус

$$\frac{n+1}{2} \cdot b = R_\oplus$$

откуда $b = \frac{2R_\oplus}{n+1}$

Тогда $\frac{n-1}{n^3} = \frac{2\pi^2 \cdot 8R_\oplus^3}{(n+1)^3 \cdot 2GM_\oplus T^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^3} = \frac{8\pi^2 R_\oplus^3}{GM_\oplus T^2} \quad (2.0)$$

известная const

Раскроем

$$\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^3} = \frac{(n^2-1)(n+1)^2}{n^3} = \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^3} = \frac{n^4 + 2n^3 - n^2 - n}{n^3}$$

Как необходимо найти n из уравнения (2.0).

Можно пойти другим путём. Пусть $2b_{\text{вращ}} = 2b_{\text{орбит}}.$ Тогда:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{nb} = \frac{4\pi^2 \cdot b^2}{2GM_\oplus T^2}$$

Здесь уже все известно

$$b = \frac{2R_\oplus}{n+1}$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{4\pi^2 r^2 \cdot 2R_{\oplus}}{2GM_{\oplus} T^2 (n+1)}$$

$$(n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{4\pi^2 r^2 R_{\oplus}}{GM_{\oplus} T^2} = \cancel{n+1} \cdot n+1 - 1 - \frac{1}{n} = n - \frac{1}{n}$$

$$r^2 = \cancel{3/4} (T^2 \cdot 0,35 M_{\oplus})^{\frac{2}{3}}$$

Здесь все известно, кроме n . Нам остается поделить
координатную

$$\frac{4\pi^2 (T^2 \cdot 0,35 M_{\oplus})^{\frac{2}{3}} R_{\oplus}}{GM_{\oplus} T^2} = n - \frac{1}{n}.$$

Здесь n — нам нужно

~~Еще считаем~~

Задача 4. Если считать, что наблюдение с Земли (по умолчанию),
~~то~~ угловые размеры областей одинаковы в два раза, то, поскольку
 расстояние ~~от~~ ~~одна~~ от каждой из областей до Земли примерно одинаково
 (расстояние до Земли много больше расстояния между ними), их
 линейные размеры тоже отличаются в два раза. Введем индекс: ~~*~~
 1-первая область (вокруг звезды спектр. класса D5), 2-вторая область
 (вокруг звезды класса B2). Тогда $R_1 \cdot 2 = R_2$.

Звезда излучает свет за счет термоядерных реакций "горения" водорода.

Знаем светимость звезды должна быть пропорциональна количеству
 вещества водорода в оболочке или области звезды. То есть $L \sim n \cdot V$, где
 n - концентрация водорода, V - объем оболочки или области, " $\sim$ " - знак
 пропорциональности. С другой стороны, по закону Стефана - Больцмана
 $L \sim R^2 T^4$. Тогда имеем: $n \cdot V = k \cdot R^2 T^4$, где k - некоторый

коэффициент. ~~Тогда~~, то равносильно $n \cdot R^3 = k R^2 T^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \cdot R = k \cdot T^4$. Тогда можем найти отношение n разных

областей:

$$\frac{n_1 R_1}{n_2 R_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Leftrightarrow \frac{n_1 \cdot R_1}{n_2 \cdot 2R_1} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2 \cdot 2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} = 2 \frac{T_1^4}{T_2^4} = 2 \cdot \frac{4 \cdot (10^4)^4}{2^4 \cdot (10^4)^4} = 2 \cdot \frac{2^8}{2^4} = 2 \cdot 2^4 = 2^5 = 32$$

Ответ: ~~*~~ концентрация водорода в первой области в 32 раза больше

Задача 5. В задаче изм роль φ не имеет потери - это

преобразованная соответствующая величина (скорость её изменения).

Представим ~~полную~~ энергию звёзд как сумму вращательной и колебательной.

$$E = E_{\text{вращ}} + E_{\text{колеб}} = \frac{1}{2} J \Omega^2 + E_{\text{колеб}} = \frac{1}{2} J \Omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2$$

$E_{\text{колеб}} = \frac{m \omega^2}{2}$, поскольку m характеризует 2 параметра и ω колебаний ~~и~~ в зависимости от φ (покажем φ в $E_{\text{вращ}}$, как J определяет параметр, ~~равновеликий~~ ~~массе~~ ~~и~~ ~~мом.~~ ~~инерции~~).

Чтобы излучение гравитационных волн привело к раскату колебаний, необходимо ~~сблиз~~ резонанс, то есть собственная частота должна совпасть с численной частотой колебаний. То есть должно быть: $\Omega = \omega$

Продифференцируем E по времени (по формуле производной преобразованной)

$$\dot{E} = \frac{\dot{J}}{2} \cdot (\Omega^2 + \omega^2) + \frac{J}{2} \cdot (\Omega^2 + \omega^2)'$$

$$= \frac{\dot{J}(\Omega^2 + \omega^2)}{2} + \frac{J}{2} \cdot (2\Omega \cdot \dot{\Omega} + 2\omega \cdot \dot{\omega})$$

~~Покажем формулу, данную в условии~~

$$\dot{J}(\Omega^2 + \omega^2) + J(2\Omega \dot{\Omega} + 2\omega \dot{\omega}) = -\frac{2\omega}{m} \dot{J}$$

$$E = \frac{J \Omega^2}{2} + \frac{m \omega^2}{2}$$

(по формуле производной преобразованной)

$$\text{Продифференцируем } E \text{ по времени: } \dot{E} = \frac{\dot{J} \Omega^2}{2} + \frac{J \cdot 2\Omega \dot{\Omega}}{2} + \frac{\dot{m} \omega^2}{2} + \frac{m \cdot 2\omega \dot{\omega}}{2} =$$

$$= \frac{\dot{J} \Omega^2}{2} + J \Omega \dot{\Omega} + \frac{\dot{m} \omega^2}{2} + m \omega \dot{\omega}$$

Подставим в формулу, данную в условии:

$$\frac{j\dot{L}^2}{2} + j\Omega\dot{L} + \frac{j\dot{\omega}^2}{2} + m\omega\dot{\omega} = -\frac{\omega}{m} \dot{j}$$

чтобы выполнялось поставленное в задаче условие, как уже и указано выше, $L = \omega$ должно быть. Подставим.

$$\cancel{\frac{j}{2}} \frac{(j+m)\omega^2}{2} + (j+m)\omega\dot{\omega} = -\frac{\omega}{m} \dot{j}$$