

¹¹
~~По~~ ~~объект~~ Звезда вращается по условно кру-
 говой орбите вокруг центра Галактики, в
 котором расположена сверхмассивная чёрная
 дыра. Тогда можно применить обобщённый
 III закон Кеплера:

$$\frac{T^2(M_* + M_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}, \text{ где } T - \text{период обращения,}$$

a - большая полуось орбиты, M_* - масса чёрной
 дыры, M_2 - масса звезды, π и G - константы.

П.к. масса звезды пренебрежимо мала в срав-
 нении с M_* , то формулу можно упростить

$$\text{то } \frac{T^2 M_*}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G M_*} \quad (T - \text{в годах,}$$

a - в а.е., M_* - в $M_\odot$). В такой системе измере-

ния $G = 4\pi^2$ (это можно вывести также из
 III закона Кеплера для системы "Земля - Солнце":

$$\frac{T^2(M_\odot + M_\oplus)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow \frac{T^2 M_\odot}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow G = 4\pi^2 \text{ для}$$

$$M_\odot = 1 M_\odot, T = 1, a = 1 \text{ а.е.}, \text{ тогда: } T^2 = \frac{a^3}{M_*}$$

Самое важное, что знаем про M_* , но
 нечего знаем $M_* = 4,5 \cdot 10^6 M_\odot$, тогда имеем

$$\text{или } a = 16 \text{ кпк} = 16 \cdot 10^3 \text{ пк} \approx 16 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.} =$$

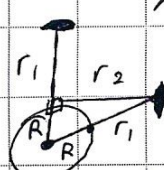
$$= 32 \cdot 10^8 \text{ а.е.}; T^2 = \frac{(32 \cdot 10^8)^3}{4,5 \cdot 10^6} = \frac{32^3 \cdot 10^{24}}{4,5 \cdot 10^6} = \frac{32^3}{4,5} \cdot 10^{18} \approx$$

$$\approx 7281,8 \cdot 10^{16} \Rightarrow T = \sqrt{7281,8 \cdot 10^{16}} \approx 10 \cdot \sqrt{7281,8} \approx 10 \cdot 85,3 \approx 853, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{7281,8} \approx 85,3, \text{ то } T \approx 85 \cdot 10^3 \text{ л. Ответ: } 85 \cdot 10^3 \text{ л.}$$

13

См. рис. рисунок.



$\bullet$ - объект, свет. шар
 $\circ$ - наблюдатель
 O - Земля.

R - радиус Земли;
 $R = 6378 \text{ км}$.

Пусть r_1 - расстояние до шара в зените (1 наблюдение), r_2 - когда он на горизонте (2 наблюдение).
 По формуле Косуса для наблюдения шара в зените и на горизонте:

$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$; т.к. мы рассматриваем один и тот же объект с одной и той же светимостью L , то отношение $\frac{E_1}{E_2}$ зависит только от расстояния до объекта, и т.к. $E_i \sim \frac{1}{r_i^2}$, то:

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)} = 10^{0,4(11)} = 10^{4,4} \Rightarrow r_2^2 = 10^{4,4} \cdot r_1^2 \quad (I)$

Рассматривая 2-е наблюдение (в горизонте) на рисунке видим треугол. треугольник "наблюдатель - объект - центр Земли"; применим т. Пифагора: $(R + r_1)^2 = r_2^2 + R^2 \Rightarrow R^2 + 2Rr_1 + r_1^2 = r_2^2 + R^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2Rr_1 + r_1^2 = 10^{4,4} r_1^2$ (подставим I) т.к. R очевидно, $r_1 \neq 0$, то $2Rr_1 + r_1^2 = 10^{4,4} r_1^2 \quad | : r_1 \Rightarrow 2R + r_1 = 10^{4,4} r_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2R = (10^{4,4} - 1) r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{2R}{10^{4,4} - 1} = \frac{2 \cdot 6378 \text{ км}}{10^{4,4} - 1} = \frac{12756 \text{ км}}{10^{4,4} - 1}$

т.к. $10^{4,4} = 10^{(4+0,4)} = 10^4 \cdot 10^{0,4} = 10^4 \cdot 2,512 = 25120$, то:

$\frac{12756 \text{ км}}{10^{4,4} - 1} = \frac{12756 \text{ км}}{25119} \approx 0,5 \text{ км}$, т.е. это был зонтик или воздушный шар.
 Ответ: 0,5 км.

№2

Скорость КА (земельский аппарат) на орбите можно вычислять по ф-ле Гейл космической (или же орбитальной скорости):

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ где } M - \text{масса планеты; } r - \text{радиус орбиты.}$$

Для выхода на параболическую орбиту с нулевой нулевой скоростью $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, а добавочная скорость получается $v_d = v_{II} - v_I = \sqrt{\frac{2GM}{r}} - \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} (\sqrt{2} - 1)$.

Скорость же, требуемая для выхода на параболическую орбиту с полета планеты есть $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, R - радиус планеты.

$$\text{По условию: } 5v_d = v_{II} \Rightarrow 5\sqrt{\frac{GM}{r}} (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{\frac{1}{r}} (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{\frac{2}{R}} \Rightarrow 25 \frac{1}{r} (\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25(\sqrt{2} - 1)^2}{2} \geq \frac{r}{R} \geq \frac{25(2 - 2\sqrt{2} + 1)}{2} \geq \frac{25(3 - 2\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{2} \approx 1,414, \text{ то } 2\sqrt{2} \approx 2,828:$$

$$\frac{r}{R} \geq \frac{25(3 - 2,828)}{2} \geq \frac{25 \cdot 0,172}{2} \geq \frac{4,3}{2} \geq 2,15. - \text{ответ,}$$

Р.С. удобен для решения факт, что мы заехали с планеты и не нужно учитывать скорость вращения планеты вокруг своей оси.

15

Пусть E - освещенность, m - видимая зв. вел., M - абсолют. блеск;
 звезды c_1 - 1-ое скопление (рассеянное), c_2 - 2-ое (шаровое),
 1 - звезда рассея. скоп., 2 - 2-ого скоп..

По формуле Погсона т.к. c_1 темнее c_2 на 10^m , а
 разница блесков $\approx 5^m$ свет. $\Rightarrow$ разница освещ. в
 100 раз, т.е. $\frac{E_{c2}}{E_{c1}} = (10^2)^2 = 10^4$

По формуле Погсона для 1-ого скоп. и одной её
 звезды:

$$\frac{E_{c1}}{E_1} = 10^3 \approx 10^{0,4(M_1 - M_{c1})} \Rightarrow 3 = 0,4(M_1 - M_{c1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{4} = 0 - M_{c1} \Rightarrow M_{c1} = -7,5^m$$

1 звезда абсолют. блеск M_2 (блеск Солнца), по-
 тому вычитаем его:

$$M_2 = 5 + m_0 - 5 \lg a_0 \approx 5 - 2,7 - 5 \lg \frac{1}{2 \cdot 10^5} = -22 + 5 \lg(2 \cdot 10^5) =$$

$$= -22 + 5(\lg 2 + \lg 10^5) \approx -22 + 5(0,3 + 5) = -22 + 1,5 + 25 =$$

$$= +4,5^m$$

По формуле Погсона для 2-ого скопления:

$$\frac{E_{c2}}{E_2} = 10^6 \approx 10^{0,4(M_2 - M_{c2})} \Rightarrow 6 = 0,4(4,5 - M_{c2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{60}{4} = 4,5 - M_{c2} \Rightarrow M_{c2} = -10,5^m$$

Запишем формулы абсол. блеска для скоплений:

$$\begin{cases} M_{c1} = 5 + m_{c1} - 5 \lg r_1 \\ M_{c2} = 5 + m_{c2} - 5 \lg r_2 \end{cases} \Rightarrow M_{c1} - M_{c2} = m_{c1} - m_{c2} - 5 \lg r_1 + 5 \lg r_2$$

$$-7,5 + 10,5 = 10 + 5(\lg r_2 - \lg r_1)$$

$$-\frac{7}{5} = \lg r_2 - \lg r_1 \Rightarrow \lg \frac{r_2}{r_1} = -1,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg \frac{r_1}{r_2} = 1,4 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 10^{1,4} \approx 10^{(1+0,4)} = 10 \cdot 10^{0,4} \approx 25,12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = 25,12 \cdot r_2$$

и

Запишем поперечное сечение:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{или} \quad M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

 $\varepsilon = \sigma T^4$ - закон Стефана-Больцмана.

А ещё есть по упрощённой модели

$$c \leq \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow M \geq \frac{c^2 R}{G} \quad \text{или по линзировке} \quad M \geq \frac{c^2 R}{G} \quad \text{или}$$

$$A = \frac{MG}{c^2}$$

Прравим массу из 2х разных формул:

$$M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{c^2 R}{G} \Rightarrow \rho = \frac{c^2 R \cdot 3}{G \cdot 4\pi R^3} = \frac{3c^2}{4\pi G R^2} \approx 7 \cdot 10^{12} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

ответ.