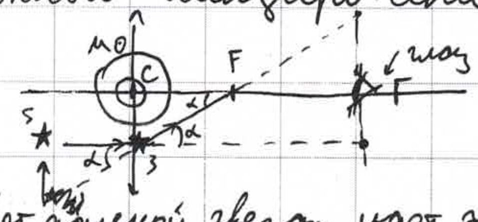
N2

Рассмотрим механизм отклонения лучей гравитационной линзой — Солнцем. Поскольку нас интересует минимальное расстояние, пусть звезда находится вблизи на сколько возможно. Также вспомним формулу угла гравитационного линзирования $\alpha = \frac{4GM}{RC^2}$, возможно она понадобится.



Солнце похоже на собирающую линзу. Оно притягивает фотоны, искажая (от далекой звезды идет параллельный пучок света) их траекторию.

Если прямую CF считать оптической осью, C — оптическим центром, то CF это фокусное расстояние. Заметим, что в треугольнике C3F $F = \frac{R}{tg\,\alpha}$, при малом α $F = \frac{R}{\alpha}$.

К примеру у Солнца $F_{min} = \frac{R_\odot}{1,75''} = \frac{7\cdot10^5\,км}{1,75''} = \frac{7\cdot10^5\,км\cdot2\cdot10^5}{1,75\,рад} =$
$= 8\cdot10^{10}$ км

Следовательно, у тела массой M, при условии $F\sim\frac{1}{M}$,

$\frac{F}{F_\odot} = \frac{M_\odot}{M}$ $F = F_\odot\left(\frac{M_\odot}{M}\right) = \frac{8\cdot10^{10}\cdot2\cdot10^{30}}{M} = \frac{16\cdot10^{40}}{M}$ (км)

Если же воспользоваться формулой $\alpha = \frac{4GM}{RC^2}$, то

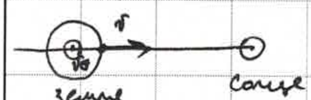
$F = \frac{R}{\alpha} = \frac{R^2C^2}{4GM}$ (заметим, что зависимость $F\sim\frac{1}{M}$ также реализуется)

Ответ: $F = 16\cdot10^{40}\cdot M^{-1}$ (км) или $F = \frac{R^2C^2}{4GM}$

№1

Рассмотрим итоги броска на разных широтах.

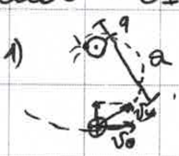
I Бросали с экватора, где бросили со скоростью v, $v_\oplus$ - орбит. v Земли



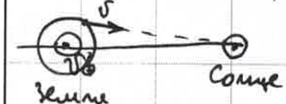
$v_\oplus = 29{,}8$ км/с $\quad v_a = \sqrt{v^2+v_\oplus^2}$

Энергетически выгодной будет орбита Цандера-Гомана, т.к.

Для падения на ☉ v_q должна быть либо $< v_{I\odot}$ (первая космической ☉), либо $q \le R_\odot$. Тогда



II Если же бросали с широты φ, то



аналогичная ситуация, меняется только пл-ть рак эллипса - орбиты зловещего шара. Для простоты все же будем рассматривать бросок с экватора и движение в пл-ти эклиптики.

1) Пусть $q \le R_\odot$, то

$v_a = \sqrt{v^2+v_\oplus^2} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)}$, где $a = \frac{a_\oplus}{2}$ (пренебрегаем длиной $R_\oplus$ и $R_\odot$)

Следует заметить, что v_a направлена под углом к направлению на солнце (т.е. не $\perp$ ему, как должно быть в q и Q). Для начала забудем об этом и примем эту скорость за скорость в афелии, потом попробуем еще раз посчитать, учитывая с ней.

1) $v_a = v_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_\oplus} - \frac{2}{a_\oplus}\right)} = 0$, учтем $R_\odot = q$, тогда $v_a = v_Q = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_\oplus} - \frac{2}{a_\oplus + R_\odot}\right)} =$

$= \sqrt{\frac{2GM(1-e)}{(R_\odot+a_\oplus)(1+e)}} \Rightarrow v_a^2 (R_\odot + a_\oplus)(1+e) = 2GM(1-e) \to e = \frac{2GM - v_a^2(R_\odot+a_\oplus)}{2GM + v_a^2(R_\odot + a_\oplus)}$

2) $R_\odot = q = \frac{1}{2}(a_\oplus + R_\odot)(1-e) \Rightarrow \cancel{v_a^2 \approx \frac{4RGM}{2a}}$ пренебрегая $a_\oplus + R_\odot \approx a_\oplus$ и $a_\oplus - R_\odot \approx a_\oplus$, получим, что $v_a^2 \approx \frac{4RGM}{2a_\oplus^2}$; $v_a^2 = v^2 + v_\oplus^2 \Rightarrow$

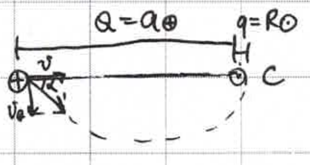
$v^2 = \underbrace{\frac{2RGM}{a^2}}_{\approx 9\cdot 10^6} - v_\oplus^2 \Rightarrow$ ~~...~~ $v_\oplus^2 \approx (3\cdot 10^4 \text{ м/с}) = 9\cdot 10^8$

$v^2 = 9\cdot 10^6 - 9\cdot 10^8 < 0$ Что невозможно

2) Пусть наша цель, чтобы $v_q \le v_{I\odot}$ т.е. $\sqrt{GM\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{a}\right)} \le \sqrt{\frac{GM}{q}}$ ⇒

$\cancel{GM}\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{a}\right) \le \cancel{GM}\cdot\frac{1}{q}$ $\frac{2}{q}-\frac{1}{q} \le \frac{1}{a}$ $\frac{1}{q} \le \frac{1}{a}$ т.е. $q \ge a$, что невозможно. ⇒ вариант нам не подходит.

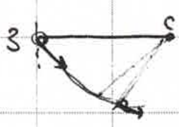
Итог:



Если попытаться учесть угол наклона скорости, то можно попробовать пойти через секториую скорость ($\sigma = const$)

$\sigma = \frac{1}{2} a_\oplus \cdot v_\oplus \sin\alpha$, $\sin\alpha \approx tg\,\alpha \approx \frac{v_\oplus}{v}$, а вблизи ☉ $\sigma = \frac{1}{2} v R_\odot \sin\beta$

Если мы движемся по траектории Ц-Г, то обязательно начнем с точки Q ⇒ при учете наклона скорости понимаем, что q будет отдален от точки C.



Подобный бросок по траектории Ц-Г невозможен.

А например тоже вряд ли.

Возможно достаточно выкинуть шар за пределы гравитационного действия Земли, тогда при его малых размерах (если это так) возможно будет действовать эффект Робертсона-Пойнтинга и он, как малая частица „упадет" на Солнце через какое-то время. Для этого он еще должен не столкнуться с другими планетами.

Тогда в принципе скорость броска ~~начальной~~ должна быть просто достаточной, чтоб вылетел от Земли к Солнцу то есть $v \ge v_{II\oplus}$

$v \ge \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$ тогда $v \approx 250$ км/с - вторая космическая от поверхности Земли; вторая космическая для Земли

Ответ: $v \approx 250$ км/с

№5

Из формулы Зеемана $\frac{N(m+1)}{Nm} \approx 4$ существует вывод $N(m;m+1) = 4\cdot 3^m$. Также помним, что звезд ярче 6^m на небе примерно 6000.

Попробуем произвести первичную оценку. Пусть N - кол-во видимых звезд до зв. величины m, тогда $N = 6000 = N(m\leq 0) + N_1 + N_2 + \ldots + N_6$,

при $\frac{N(m+1)}{Nm} \approx 4$, $N = 4\cdot 4^0 + 4\cdot 4^1 + 4\cdot 4^2 + \ldots + 4\cdot 4^6$ геом. прогрессия

(Тут вспомнили, что звезд $m \leq 0$ 4) $S_N = N = \frac{4(4^6-1)}{4-1} \approx 5458$.

Не очень точно, но для начала подойдет.

Пусть $N_u = 300\,615\,205 = N(\leq 0) + N_1 + N_2 + \ldots + N_m$, $N_u = \frac{4(4^m-1)}{3} \Rightarrow$

$225\,461\,405 = 4^m$ Оценим m. $4^6 = 4\,096 \approx 4\cdot 10^3$, значит

$2\cdot 10^8 \approx (4\cdot 10^3)^2 \cdot 4^2 \approx 3\cdot 10^8 = 4^{14} \Rightarrow 13{,}5 < m < 14$

$4^{14} = 308\,435\,072$ $4^{13,5} = 154\,217\,536 \Rightarrow m \approx 13{,}7^m$

Ответ: $\approx 13{,}7^m$

№3

Вспомним, что лабораторная длина линии $H\alpha$ 6562,8 Å

1) У этой же галактики она на 7900 Å с шириной 16 Å.

Линия может иметь ширину вследствии вращения галактики т.е.  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v}{c} \Rightarrow \frac{16}{7900} = \frac{2v}{c}$

$v = \frac{16 \cdot 3 \cdot 10^5}{7900 \cdot 2} \approx 0,3 \cdot 10^3$ км/с $= 300$ км/с (заметим, что v_0 в Галактике 230 км/с ⇒ полученное нами значение скорости вполне реально.

2) Смещение же самой линии $H\alpha$ может быть вызвано Хаббловским смещением (но тогда $z < 0,3$) или же гравитационным красным смещением. ($z = \frac{GM}{Rc^2}$)

$z = \frac{7900 - 6562,8}{6562,8} \approx 0,204$ ($< 0,3$) Пусть это красное смещение вызвано Хаббловским расширением. Тогда $z = \frac{V}{c}$, $V = zc$;

$V = H \cdot r \Rightarrow r = \frac{V}{H} = \frac{zc}{\underset{68\,\frac{км/с}{Мпк}}{H}} = 900$ Мпк $= 9 \cdot 10^8$ пк

3) ~~Вспомним, что~~ Получим оценку m через предположение, что галактика подобна Млечному пути ($M = -20,9^m$). Поглощением пренебрежем. $m = M - 5 + 5\lg r = -20,9 - 5 + 5\lg 900 =$

$= -25,9 + 5(\lg 9 + \lg 10^8) = -25,9 + 5\lg 9 + 40 = 14,1 + 5\underset{\approx 0,98}{\lg 9} \approx 19^m$

3) Попробуем предположить, что $L \sim M$, $L_{м.п.} = 20\, L_\odot$, скорость из-за темной материи ≈ одинакова на краях галактик, сравним скорости вращения галактик и Млечного пути и сопоставим с массами. Тогда $\frac{v_{м.п.}}{v_г} = \left(\frac{M_{м.п.}}{M_г}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow M_г \approx M_{м.п.}\left(\frac{300}{200}\right)^2 \approx$

$\approx 10^{12} M_\odot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^{12} M_\odot$

~~В основном в галактиках~~ Сидеры всего $L \sim M^n$, но n я не помню, поэтому предположу, что $L = \text{кол-во} \cdot L_\odot$, $M = \text{кол-во} \cdot M_\odot$ ⇒ если галактика массивнее в N раз, то там в N раз больше звезд светимостью $L_\odot$ ⇒ общая светимость в N раз больше ⇒

$$\frac{M_г}{M_{м.п.}} = \frac{L_г}{L_{м.п.}} \Rightarrow L_г = L_{м.п.} \cdot \frac{M_г}{M_{м.п.}} = 20 L_\odot \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{12} M_\odot}{10^{12} M_\odot} = 50 L_\odot$$

По формуле Погсона $\frac{L_г}{L_{м.п.}} = 10^{0{,}4(M_{м.п.} - M_г)} \Rightarrow M_г = M_{м.п.} - 2{,}5 \lg \frac{50 L_\odot}{20 L_\odot} =$

$= -20{,}9 - 2{,}5 \lg 2{,}5 = -20{,}9 - 1 = -21{,}9$

Тогда $m = -21{,}9 - 5 + 5 \lg(9 \cdot 10^8) = -26{,}9 + 5 \lg 900 \approx 18^m$

Ответ: $m = 18^m$

№4

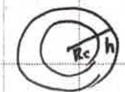
Заметим, что падение Юпитера будет заметным фактом т.к. $M_{Ю} = 0{,}1 M_\odot$ ($\rho_{Ю} \approx \rho_c$, $R_Ю = 0{,}1 R_\odot$). Помним, что обращение Солнца не твердотельно (T на экваторе ≈25 сут, на полюсах ≈34 сут.) поэтому возможно важно куда упадет Юпитер. Вероятно это явление можно сравнить с аккрецией в-ва в двойной системе звезд (хоть Юпитер и не звезда, состав такой же, просто масса мала) т.к. орбита все же меняется, хоть и медленно, по условию. Эволюцией пренебрегаем ⇒ состав Юпитера и Солнца считаем одинаковым.

Первое, что приходит на ум это „уменьшение массы ⇒ меняется первая космическая на расстоянии ≈ радиуса"

Тогда $M_н = M_⊙ + M_{ю} = 1{,}1 M_⊙$ $\quad v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Скорость ~~вращения~~ обращения экватора Солнца ≈ 2 км/с $\Rightarrow$ при увеличении масс в $\sqrt{1{,}1}$ раз она станет $\approx 2\sqrt{1{,}1} \approx 2{,}1$ км/с

Заметим, что при полном слиянии изменится и радиус Солнца т.к. $V_{ю} = 0{,}001 V_⊙$



Радиус станет больше на высоту h, тогда

$h \cdot 4\pi R_c^2 = \frac{4}{3}\pi R_{ю}^3 \Rightarrow h = \frac{1}{3}\frac{(R_{ю})^3}{(R_c)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}1^3 \cdot R_c^3}{1000\, R_c^2} = 0{,}3 \cdot 10^{-3} R_c \approx 210$ км

Для слоев, которые вращаются с $\approx$ первой космической скоростью $v = \sqrt{\frac{G\, 1{,}1 M_⊙}{(h + R_⊙)}} \approx 2{,}1$ км/с т.к. $h \ll R_⊙$, а период $P_1 = \frac{2\pi R}{v} = 25\text{сут}\cdot\frac{2{,}1}{2} = \approx 26{,}25$ суток

Также в Солнце происходит тепловое движение со среднеквадратичной скоростью $v_т = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ $(\mu_⊙ \approx 10^{-3}$ кг/моль$)$

При увеличении масс из-за Юпитера увеличится светимость, тогда и температура. $\Rightarrow$ скорость теплового движения.

$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^4 = 1{,}1^4 \quad L_2 = L_1 \cdot 1{,}1^4$; $\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4$ $R_2 \approx R_1 \Rightarrow$

$1{,}1^4 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \Rightarrow T_2 = 1{,}1 T_1 = 6380$ K

Тогда $v_т = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 6380}{10^{-3}}} \approx 1{,}3 \cdot 10^4$ м/с $= 13$ км/с В таком случае $P_4 = \frac{2\pi R_⊙}{v_т} \approx 3{,}23 \cdot 10^5$ с $\approx 3{,}7$ сут, что выглядит уж слишком мало. Но это период обращения тепловых частиц, а не Солнца в целом. У того же Солнца в реальности температура в 1,1 раз меньше, однако экватор не вращается со скоростью ≈ 4 суток $\Rightarrow$ ~~теплово~~ увеличение температуры существенно не повлияет, оно отвечает за другое.

Можно пойти через эквипотенциальную поверхность

Шифр участника: Сам-13 Страница: 8 из 8

На экваторе потенциал будет $-\frac{GM}{R+\Delta r} - \frac{v^2}{r}$, а на полюсе $-\frac{GM}{R}$ т.к. полюс не вращается (Δr - увеличение радиуса Солнца на экваторе вследствие перетекания в-ва с Юпитера) $-\frac{GM}{R+\Delta r} - \frac{v^2}{(R+\Delta r)} = -\frac{GM}{R}$

$$-\frac{GM}{R+\Delta r}\Big|^{R} + \frac{GM}{R}\Big|^{R+\Delta r} = \frac{v^2}{R+\Delta r} \qquad v^2 = (R+\Delta r)\frac{(\cancel{GMR}+GM\Delta r - \cancel{GMR})}{R(\cancel{R+\Delta r})} = \frac{(R+\Delta r)(GM\Delta r)}{R(R+\Delta r)}$$

$$= \frac{GM\Delta r}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM\Delta r}{R}} = v_{I\odot}\sqrt{\Delta r} \approx 2\text{ км/с}\sqrt{\Delta r}$$

$$V_{\text{юпитера}} = 0{,}001\,V_\odot \Rightarrow \Delta r\cdot(\cancel{2\pi}\cancel{R}\cdot l) = \cancel{\tfrac{4}{3}}\cancel{\pi}R^{\cancel{3}}\cdot 10^{-3} \qquad \Delta r = \frac{10^{-3}R^2}{3l}, \text{ пусть}$$

$$l = \Delta r, \text{ то} \quad 3\Delta r^2 = 10^{-3}R^2 \Rightarrow \Delta r \approx 0{,}6\cdot 10^{-1,5}R_\odot \approx 4{,}2\cdot 10^{3,5}\text{ км}$$

$$v = 2\cdot\sqrt{\Delta r} \approx 4\cdot 10^{1,75}\text{ км/с} \ ; \ \cancel{P = \frac{2\pi(R+\Delta r)}{v}}$$

$$P = \left(\frac{4\cdot 10^{1,75}}{2}\right)^{-1} 25\text{ сут} = 12{,}5\cdot 10^{-1,75}\text{ сут.} \text{ (чуть больше 4 ч.)}$$

Ответ: $\approx 1{,}25\cdot 10^{-0,75}$ сут $\approx$