№3.

Для начала вычислим расстояние до галактики. Используя закон Хаббла и эффект Доплера (красное смещение):

$$z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$$

$$H\cdot r = c\cdot z \qquad r=\frac{c\cdot(\lambda-\lambda_0)}{\lambda_0\cdot H}=\frac{300000\,\frac{км}{с}\,(7900\,Å-6563\,Å)}{72\,\frac{км}{с\cdot Мпк}\cdot 6563\,Å}$$

Лабораторная H_α: $\lambda=6563\,Å$, $H\sim 72\,\frac{км}{с\cdot Мпк}$

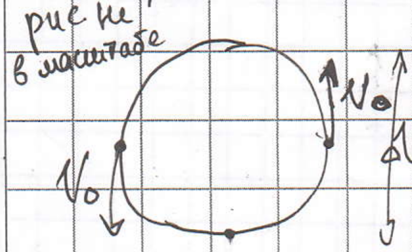
$$r=\frac{4011\cdot10^5}{472536}\,Мпк\sim\frac{4\cdot10^8}{473000}\,Мпк=\frac{4\cdot10^6}{473\cdot10^3}\cdot10^2\,Мпк=$$

$= 850\,Мпк \sim 1000\,Мпк$

$$\begin{array}{r} 1337 \\ \times\ 300000 \\ \hline 4011\cdot10^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6563 \\ \times\ 72 \\ \hline 13126 \\ +\ 45941\ \ \\ \hline 472536 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4000000 & 473000 \\ -\ 3784000 & 8{,}45\sim 8{,}5 \\ \hline 2160000 & \\ -\ 1892000 & \\ \hline 2680000 & \\ -\ 2365000 & \\ \hline 315000 & \end{array}$$

Ширина линии Hα показывает разность скоростей в противоположных точках за счет эффекта Доплера:

рис не в масштабе



Где V_0 – скорость звезд на краю галактики. Найдем её:

$$\Delta V = 2\cdot V_0 = c\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 300000\,\frac{км}{с}\cdot\frac{16}{6563}=$$

$$=\frac{4{,}8\cdot10^6}{6563}\,\frac{км}{с}=\frac{48000}{6563}\cdot10^2\,\frac{км}{с}=$$

$$=7{,}3\cdot10^2\,\frac{км}{с}=730\,\frac{км}{с}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48000 & 6563 \\ -\ 45941 & 7{,}3 \\ \hline 20590 & \\ -\ 19689 & \\ \hline 0901 & \end{array}$$

Тогда $V_0=\frac{730}{2}\,\frac{км}{с}=365\,\frac{км}{с}$.

Чтобы найти видимую зв. величину, нам нужно узнать абсолютную зв. величину галактики, либо её светимость. Из данных, ~~из условия~~ которые мы получим, и воспользовавшись ~~эмпир~~ эмпирическим соотношением Талли-Фишера (или по-другому зависимостью светимость-^{max}скорость вращения галактики). Так как в задаче мы работаем с видимым диапазоном,

$L \propto V_0^{\alpha}$ возьмем значение $\alpha = \sim 3$

$$\frac{L_1}{L_M} = \left(\frac{V_0}{V_M}\right)^3$$ (как раз для $\lambda \sim$ 400-500 нм), где L_M, V_M – светимость и скорость для Млечного пути.

V_M найдем сами (не используя кривую вращения)
Для удобства вычислений также используем известную зависимость $R \propto M^{0,5}$ для спиральных галактик (~~Талли~~ Талли-Фишер ~~испол~~ применим также только к ним)

$R_M = 15$ кпк $= 4{,}5 \cdot 10^{20}$ м

$$V_M^2 = \frac{GM}{R} \sim GR = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{20} = 3 \cdot 10^{10}$$

$$V_M = \sqrt{3} \cdot 10^5 \, \frac{м}{с} \sim 170 \, \frac{км}{с}$$

$\times$ 6,7
4,5
335
268
30,15

L_M примем как данное (по памяти мне известно это значение) $L_M \sim 2 \cdot 10^{10} L_\odot$ (допустим Млечный Путь состоит из $2 \cdot 10^{10}$ звезд типа Солнца)

Тогда L_1: $L_1 = L_M \cdot \left(\frac{V_0}{V_M}\right)^3 =$

$$= 2 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{26} \cdot \left(\frac{365}{170}\right)^3 \sim 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{36} \text{ Вт} =$$

$$= \cancel{1{,}6 \cdot 10^{3}} \; 6{,}4 \cdot 10^{37} \text{ Вт} = 1{,}6 \cdot 10^{11} L_\odot$$

365 | 170
340 | 2,14...
250
170
800

Можно было также считать немного другим способом: расписать V_0 как $\frac{GM}{R}$ и опять же по соотношению $M \sim R^2$ найти сначала массу, а затем, сказав, что галактика состоит из N звезд типа Солнца, найти светимость.

В таком случае мы бы получили похожее значение светимости, так как логика решения одна и та же и $L \propto V_0^\alpha$ и $M \sim R^2$ - связаны.

Итак, зная светимость, найдем абсолютную зв. величину: по Погсону сравним с Солнцем:

$$\frac{1{,}6 \cdot 10^{11} L_\odot}{L_\odot} = 10^{0{,}4(4{,}7 - M_r)}$$

$$4{,}7 - M_r = 2{,}5 \lg 1{,}6 \cdot 10^{11} \sim 27{,}5$$

$$M_r = 4{,}7 - 27{,}5 = -22{,}8^m$$

Зная расстояние до галактики и абс. зв. величину, найдем видимую: $m = M - 5 + 5\lg r = -22{,}8 - 5 + 5\lg(850 \cdot 10^6) \approx -27{,}8 + 5 \cdot \lg(10^9 \text{ пк}) = -27{,}8 + 45 = \sim -28 + 45 = 17^m$

Это и есть ответ на задачу.

Ответ: $m \sim 17^m$.

№5.

$N = 300615205$ звезд.

Для начала рассмотрим ситуацию, что мудрец был без какого-либо инструмента, и находился, например, на экваторе, чтобы была возможность наблюдать все звёзды земного неба (либо чтобы он мог передвигаться по поверхности Земли). Тогда всего он смог бы увидеть ~6000 звезд, при том, что проницающая способность глаза $\sim 6^m$ (с учетом атмосферного поглощения $\sim 0{,}3^m$ в зените). Но в задаче он видит намного больше. Допустим все звёзды нашей галактики подобны Солнцу и распределены в диске равномерно. ~~Предельное расстояние~~ Самая далекая от нас звезда, которую мы можем увидеть невооруженным глазом находится на расстоянии: (найдем из закона Погсона и обратных квадратов):

~~$m = M + 5 - 5\lg r$~~ $10^{0,4(4,7-6)} =$

$$10^{0,4(6-4,7)} = \left(\frac{r}{10пк}\right)^2 \qquad \sqrt{10} \sim 3,2 \qquad \sqrt{3,2} \sim 1,8$$

$$\begin{array}{r} \times 0,4 \\ 1,3 \\ \hline + 12 \\ 4 \\ \hline 0,52 \end{array}$$

$$r = \sqrt{10^2 \cdot 10^{0,52}}\,пк = \sqrt{10^2 \cdot 3,2}\,пк = \sim 10 \cdot 1,8\,пк = 18пк$$

Теперь найдем предельное расстояние (т.е. радиус видимости) для N звезд.

Распределение звезд по объему равномерно, поэтому: $R^3 \propto N$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{N}{6000} \qquad \text{Найдем } R: \quad \frac{N}{6000} \sim 5\cdot 10^4$$

$$\sqrt[3]{5\cdot 10^4} = \sqrt[3]{50}\cdot 10 \sim 37$$

$$\frac{R}{r} \sim 37$$

$$R = 18\cdot 37пк = 666пк$$

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 18 \\ \hline + 296 \\ 37 \\ \hline 666 \end{array}$$

А диаметр шара наблюдения N звезд будет $D \approx 1300пк$, что много больше толщины Млечного пути (который $\sim 300пк$). Итак, получаем такую картину: вообще это усеченная сфера, но для удобства апроксимируем до цилиндра $h = 300пк$ и искомым радиусом.

Перерешаем задачу с новым объемом: (считаем что за диском МП звезд нет)

$$\frac{N}{6000} = \frac{h\cdot \pi R^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} \qquad \text{Отсюда } R:$$

$$R = \sqrt{\frac{5\cdot 10^4 \cdot 4 \cdot (18пк)^3}{3\cdot 300пк}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^3}{9}\cdot 18^3}\ пк = \sim\sqrt{\frac{2\cdot 10^3 \cdot 6000}{9}}\ пк =$$

$$= \frac{1000}{3}\cdot\sqrt{12} = \frac{2000}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = \frac{2000}{1{,}7} \sim 1200пк$$

$\times 18$, 18, 324; $\times 324$, 18, 2592, $+324$, 5832

Также в диске галактики наблюдается межзвездное поглощение величины 2^m/кпк

$2000 : 17 = 117{,}6$; -17, 30, -17, 130, -119, 110, -102, 80

Итак, что мы имеем:

Мудрец наблюдает самые дальние звезды на расстоянии 1200 пк от него. Эти звезды ослабеваются на $2{,}4^m$ за счет поглощения. Вычислим видимую звездную величину звезды типа солнца на расстоянии r:

$$m = M - 5 + 5\lg r + 2{,}4^m = 4{,}7 - 5 + 2{,}4 + 5\lg(\overset{\sim 3}{1200\,пк}) = 17{,}1 \sim 17^m$$

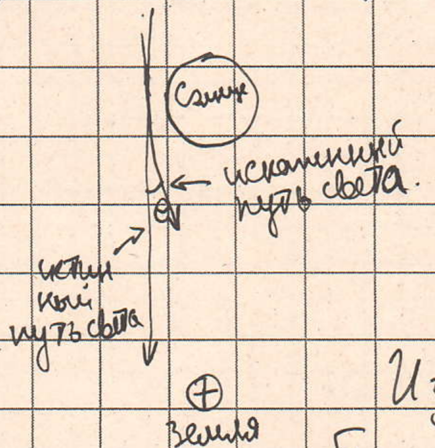
Это предельная звездная величина, наблюдаемая мудрецом, а значит это и есть проницающая способность инструмента, используемого мудрецом (т.е. предельная зв. величина, которую он может увидеть в инструмент, с учетом $m = 6^m$ для глаза)

Ответ: $m_{max} = 17^m$

№2.

Что такое гравитационная линза? Это массивный объект, который за счет своего гравитационного воздействия отклоняет световые лучи (и вообще всего излучения). Эффект подобен черным дырам, только в их случае ~~свет окончательно не~~ влияние настолько сильно, что свет не просто отклоняется, а впринципе не может покинуть черную дыру. Такой же эффект, но менее слабый можно наблюдать и рядом с Солнцем: во время солнечного затмения (т.е. когда основная часть диска перекрывается и становятся доступными для изучения незасвеченные Солнцем области неба около него) мы видим отклонение лучей от звезд на $\Theta = 1{,}75''$ около солнца. Радиус Шварцшильда составляет:

$R = \frac{2GM}{c^2}$ гравитационный, или горизонт событий



По формуле угловых размеров:

$\Theta = \frac{2R}{r} = \frac{4GM}{r c^2}$, где

Из условия задачи: $F \propto \frac{1}{M}$

$\frac{F}{F_0} = \frac{M_0}{M}$, где F_0, M_0 – фокусное расстояние и масса Солнца.

F_0 находится из знания Θ (в его формуле r – это и есть ~~F_0~~ то своеобразное F_0, то есть расстояние с которого свет максимально искажается)

$F_0 = \frac{4GM_0}{\Theta c^2} = \frac{4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot 206265}{1{,}75\cdot 9\cdot 10^{16}}$ м $= 1{,}2\cdot 10^9$ м $=$

$= 1{,}2\cdot 10^6$ км

Значит:

Шифр участника: КАЗ-25 Страница: 7 из 11

Подставляем F_0 и M_0:

$$F = \frac{2\cdot10^{30}\cdot1{,}2\cdot10^{9}}{M} = \frac{2{,}4\cdot10^{39}}{M}\ м.$$

Радиус Шварцшильда для Солнца:

$$R = \frac{2\cdot6{,}7\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{9\cdot10^{16}} \approx 3\cdot10^{3}м = 3км$$

Ответ: $F = \frac{2{,}4\cdot10^{39}}{M[кг]}$ [м]

№4.

Для начала опишем требуемые для решения задачи данные. Во-первых масса Юпитера в 1000 раз меньше массы Солнца. Во-вторых сейчас Солнце вращается дифференциально (вокруг своей оси), т.е. период изменяется от 25сут на экваторе, до 38 ~~на пол~~ вблизи полюсов. ~~Арисм~~, Допустим, что плоскость орбиты Юпитера и экватора Солнца совпадают. (т.е. лежат в плоскости эклиптики). Тогда Юпитер врежется в солнечный экватор и придаст ему некий импульс.

Направление вращения Солнца вокруг себя и Юпитера вокруг Солнца совпадают. (оба против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики).

Юпитер падает, ~~то есть~~ набирая скорость при этом. То есть можем считать, что он движется по очень вытянутому эллипсу, с перигелием $r_{пер} = R_0$ (радиус Солнца) а афелием $r_{афр} = a_{Ю} = 5{,}2ае$

Вообще возможны две модели: 1) Радиус меняется очень медленно и Юпитер движется по спирали; 2) Юпитер движется по эллипсу и за пол-оборота уже столкнется с Солнцем.

В первом случае скорость Юпитера около поверхности Солнца будет равна I космической (т.е. круговой) для $R=R_0$ $v^2=\frac{GM_0}{R_0}$

Во втором случае:

$$v^2=\frac{2GM}{a_{10}}\cdot\frac{1+e}{1-e}=\frac{2GM}{a_0}\cdot\frac{r_{аф}}{r_{пер}}\sim\frac{2GM}{R_0}$$

То есть скорость будет в $\sqrt{2}$ раза больше. В условии написано, что радиус орбиты изменяется достаточно медленно, поэтому вычислим скорость по 1) способу.

По ЗСИ:

$M_0\cdot V_0+m\cdot V_{10}=V'\cdot(M_0+m)$, где M_0, m – массы $\odot$ и Юпитера; V' Искомая скорость V'. V_0 – скорость осевого вращения $\odot$ сейчас.

$$V'=\frac{\frac{M_0\cdot 2\pi R_0}{T_0}+\frac{m\sqrt{GM_0}}{\sqrt{R_0}}}{m+M}$$

V_{10} – скорость Юпитера в момент столкновения. Знак + в равенстве, т.к. скорости сонаправлены.

$$V_{10}=\sqrt{\frac{GM_0}{R_0}}=\sqrt{\frac{6{,}7\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{7\cdot10^{8}}}=$$
$$=\sim\sqrt{20}\cdot10^5=4{,}5\cdot10^5\ \frac{м}{с}=450\ \frac{км}{с}$$

Мы рассматриваем столкновение на экваторе, поэтому $T=25$ сут.

$$V_0=\frac{2\pi\cdot7\cdot10^8}{25\cdot24\cdot3600}=2000\ \frac{м}{с}$$

(вычисления в черновике)

$M_0=10^3\cdot m$

$$V'=\frac{10^3\cdot m\cdot2000+m\cdot4{,}5\cdot10^5}{1001\cdot m}=\sim\frac{2\cdot10^6+4{,}5\cdot10^5}{1000}=(2000+450)\ \frac{м}{с}=$$
$$\sim=2500\ \frac{м}{с}$$

7) Далее считая, что $m \ll M$ и масса Солнца критически не изменялась:

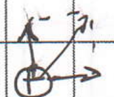
$$T_{нов} = \frac{2\pi R_0}{2500 \frac{м}{с}} = \frac{7\cdot 10^8 \cdot 6{,}3}{2500} = 18\cdot 10^6 с = \frac{18\cdot 10^6}{3600} ч = 5000 ч =$$

$$= \frac{5000}{24} сут = \ldots \approx 20 сут$$

Ответ: $T_{нов} = 20$ сут.

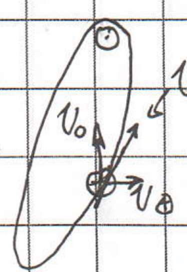
№1.

На момент ситуации в задаче был полдень, то есть Солнце было в кульминации и Оох запустил шар прямо в видимый центр Солнца. Для начала опустим влияние местоположения (широту) Ооха на Земле. Запульнув шар в Солнце, Оох придал ему некую скорость $V_{\oplus}$. Но помимо нее относительно Солнца есть еще одна составляющая скорости, а именно орбитальная Земли, равная $V_{\oplus} = 30 \frac{км}{с}$. Итак, Оох запустил шар, и он начал двигаться по очень вытянутому эллипсу, афелий которого находится далеко за орбитой Земли, а перигелий на радиусе Солнца.



Запишем закон сохранения энергии:

Для момента старта с Земли и момента столкновения с Солнцем



$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{GMm}{R_0} = 0,$$ т.к. столкновении.

$r = 1 ае$

По-другому кинетическая энергия должна

скомпенсировать разность потенциальных энергий.

$\Delta E_{пот} = E_{кин}$

$$\frac{GMm}{R_0} - \frac{GMm}{r} = \frac{mV_1^2}{2}$$

$$\frac{GM}{R_0} - \frac{GM}{r} = \frac{V_1^2}{2}$$ Отсюда:

$$\frac{1}{r} << \frac{1}{R_0}$$

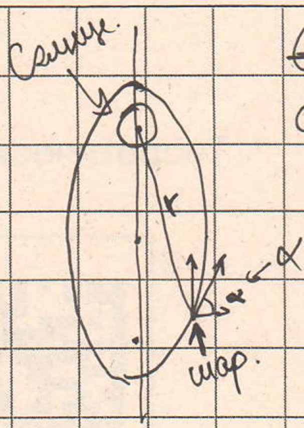
$$V_1 = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_0} - \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{почти } 0}\right)} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}{7\cdot 10^{8}}}\ \frac{м}{с} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 10^{11}}\ \frac{м}{с} = 2\cdot 10^{5}\cdot\sqrt{10} = 6{,}4\cdot 10^{5}\ \frac{м}{с} \sim 640\ \frac{км}{с}$$

Тогда V_0: $V_0 = \sqrt{V_1^2 - V_\oplus^2} = \sqrt{640^2 - 30^2}$ - это

При столь большой скорости тоже $\sim 640\,\frac{км}{с}$, т.к. место запуска с Земли также $30^2 << 640^2$ влияет очень несущественно, поэтому для удобства скажем мы пренебрегли вращением Земли вокруг своей оси, и атмосферными помехами, а также притяжением Земли, т.к. найденная нами скорость много больше II космической для нее (однако при наличии калькулятора и времени, можно было бы учесть все эти эффекты)

Но на самом деле скорость, которую мы посчитали выше не минимальна, т.к. эллипс может и не быть „бесконечным", как у нас было. Скорость направлена под некием углом, к нормали. ~~и угол может быть видне нормали (> 1° и < 90°)~~



~~Скоро~~ И тогда скорость в точке старта шара можно вычислить из интеграла энергии, а именно:

$$V^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \text{ где } r = 1ae$$

Зная зависимость $\angle\alpha$ и a от r, можно найти a.

Тогда V_1 будет вычисляться легче:
Эллипс очень вытянут, так что вдали от перигелия и афелия α почти ~~180~~ 90°. Значит можно считать, что $r = \frac{a}{2}$ ~~$a = 2ae$~~

Тогда: $V_1^2 = \cancel{GM\left(\frac{2}{2ae} - \frac{1}{2ae}\right)} = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{2r}\right) = \frac{GM \cdot 3}{2r} =$

$$= \frac{3 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}} = \sim 1{,}3 \cdot 10^9 \frac{м^2}{с^2}$$

$$V_1 = \sqrt{130 \cdot 10^7}\ \frac{м}{с} = \sim 11 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{10} = 3{,}5 \cdot 10^4 \frac{м}{с} = 35 \frac{км}{с}$$

Тут уже имеет смысл учесть $V_\oplus$:

$V_0 = \sqrt{35^2 - 30^2}\ \frac{км}{с} = 18 \frac{км}{с}$ (максимально приблизительно, т.к ~~соот~~ вычислить соотношение a и r очень тяжело без калькулятора)

Ответ: $\sim 18 \frac{км}{с}$