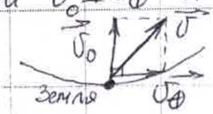
№ 1

Пусть ~~он~~ волшебник придал шару скорость ~~в~~ $\vec{v}_0$ ~~он~~ относительно Земли в направлении Солнца. Сама Земля движется со скоростью $\vec{v}_\oplus$, $v_\oplus = 29{,}8\,\frac{км}{с} \approx 30\,\frac{км}{с}$ по орбите вокруг Солнца. Т.к. орбиту можно считать круговой, то скорость $\vec{v}_\oplus \perp$ направлению на Солнце, тогда $\vec{v}_0 \perp \vec{v}_\oplus$ и итоговая скорость при отрыве от Земли равна $v = \sqrt{v_0^2 + v_\oplus^2}$



(~~Тогда~~ В этот момент времени солнечный полдень, значит, направление на Солнце в этом месте в это время именно такое, как на рисунке и $\vec{v}_0 \perp \vec{v}_\oplus$).

Но есть ещё $v_з$ - скорость вращения Земли вокруг своей оси, направленная против часовой стрелки вокруг Земли, т.е. $v_з$ направлена влево на рис. Оценим $v_з$: она max, если дело происходит на экваторе: $v_з = \frac{2\pi R_\oplus}{24ч} \approx \frac{40\,000\,км}{24\,ч} \approx 1{,}3\cdot10^3\,\frac{км}{ч} = \frac{1{,}3\cdot10^3}{3600}\,\frac{км}{с} = \frac{1{,}3}{3{,}6}\,\frac{км}{с} \approx \frac{1}{3}\,\frac{км}{с} \ll v_\oplus = 30\,\frac{км}{с}$ => её можно не учитывать. Тогда в момент начала полета кинетическая энергия шарика $= \frac{mv^2}{2}$, где m - его масса, потенциальная (относительно Земли) $= -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}$. Допустим, в тот момент, когда шар выйдет за пределы действия притяжения Земли ($E_{п,\oplus} = 0$ станет), его скорость будет v_x, тогда его полная энергия $= \frac{mv_x^2}{2}$. Отсюда по ЗСЭ: $\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{mv_x^2}{2} \Rightarrow v^2 - \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} = v_x^2 = v_0^2 + v_\oplus^2 - \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}$.

Дальше рассмотрим взаимодействие шарика с Солнцем: Если после выхода из поля тяготения Земли у шарика будет нулевая скорость, т.е. он остановится, то обратно на Землю он уже не упадёт, т.к. он удалился от Земли настолько, что она на него уже не действует; зато на него будет действовать притяжение Солнца, и он упадёт на Солнце. Таким образом, нам достаточно, чтобы $v_x = 0$, и, т.к. нам необходимо минимальное v_0, то мы будем рассматривать именно этот предельный случай $\Rightarrow v_0^2 + v_\oplus^2 - \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} = 0 \Rightarrow$

$$v_0^2 = \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} - v_\oplus^2 = \left(\frac{2\cdot 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{6400\,000}\right)\frac{м^2}{с^2} - \left(3\cdot10^4\,\frac{м}{с}\right)^2 \approx \left(12\cdot\frac{10^{-11}\cdot10^{24}}{10^6}\right)\frac{м^2}{с^2} - \left(3\cdot10^4\,\frac{м}{с}\right)^2 =$$

$$= 12\cdot10^8\,\frac{м^2}{с^2} - 9\cdot10^8\,\frac{м^2}{с^2} \approx 3\cdot10^8\,\frac{м^2}{с^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{3\cdot10^8\,\frac{м^2}{с^2}} = 1{,}73\cdot10^4\,м/с = 17{,}3\,км/с$$

№ 5

Невооружённым глазом в идеальных условиях видны звёзды до 6^m и на всём небе видно около 6 000 звёзд. Допустим, студент находился вблизи экватора и в течение года смог наблюдать всю небесную сферу. Предположим, что звёзды в пространстве расположены примерно равномерно. Тогда, ~~все~~ количество наблюдаемых звёзд зависит от объёма пространства, доступного для наблюдений: чем больше объём, тем больше звёзд мы сможем увидеть. Пусть R_0 – максимальное расстояние, на котором можно увидеть звезду невооружённым глазом, а R – в наблюдательный инструмент студента. Тогда доступный для наблюдений невооружённым глазом ~~доступно~~ объём ограничен сферой радиусом R_0, а для наблюдений в этот инструмент – радиусом R => это $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. И увидеть можно $N_0 = 6000$ звёзд и $N = 300\,615\,205$ звёзд соответственно =>

$$\frac{N_0}{N} = \frac{V_0}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{R_0^3}{R^3} \Rightarrow \frac{R_0}{R} = \sqrt[3]{\frac{N_0}{N}}.$$

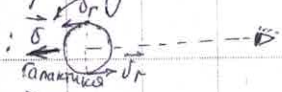
Самая тусклая звезда, которую ещё можно наблюдать глазом – это звезда величины $m_0 = 6^m$ на расстоянии R_0 от нас, а ~~звезда, ко~~ в этот инструмент – звезда на расстоянии R от Земли, которая на расстоянии R_0 имела бы звёздную величину 6^m. Пусть её видимая величина на расстоянии R от Земли – это m, тогда m – искомая проницающая способность инструмента. Звезда, видимая ~~вид~~ звёздная величина которой m, – предельная видимая в инструмент ~~телескоп~~, значит, на расстоянии R_0 от Земли она имела бы ~~имеет~~ звёздную видимую величину $m_0 = 6^m$, и в инструмент она видна как звезда 6й звёздной величины, значит, ~~в отношение~~ разность освещенностей E и разность видимых звёздных величин вызвана только разными расстояниями => т.к. $E \sim \frac{1}{R}$, то $\frac{E_0}{E} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{2/3}$. По формуле Погсона $\frac{E_0}{E} = 2{,}512^{m-m_0}$ =>

$$m = m_0 + 2{,}5\lg\frac{E_0}{E} = m_0 + 2{,}5\cdot\frac{2}{3}\lg\frac{N}{N_0} = 6 + \frac{5}{3}\lg\frac{300\,615\,205}{6\,000} = 6 + \frac{5}{3}\lg 50\,102{,}534$$

$$m \approx 6 + \frac{5}{3}\lg 50\,000 = 6 + \frac{5}{3}\lg 5 + \frac{5}{3}\lg 10^4 \approx 6 + \frac{20}{3} + \frac{5}{3}\lg 5 \approx 6 + 6{,}7 + 1 = 13{,}7^m$$

№3

Красное смещение линии H_α $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$, где v – скорость удаляющейся галактики от Солнца, $\lambda_0 = 6563$ Å – лабораторная длина линии H_α $\Rightarrow$ $v = c \cdot \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 3\cdot10^5 \frac{км}{с} \cdot \frac{7900Å - 6563Å}{6563Å} = 3\cdot10^5\frac{км}{с}\cdot\frac{1337Å}{6563Å} \approx$ $\approx 3\cdot10^5\frac{км}{с}\cdot\frac{1}{5} = 0{,}6\cdot10^5\frac{км}{с} = 6\cdot10^4\frac{км}{с}$. Отсюда по з-ну Хаббла найдём расстояние до галактики r: $v = Hr \Rightarrow r = \frac{v}{H}$, H – постоянная Хаббла, $H \approx 70 \frac{км}{с\cdot Мпк}$ $\Rightarrow r = \frac{60\ 000\ км/с}{70\ км/с\cdot Мпк} \approx 8{,}57\cdot10^2$ Мпк $= 857$ Мпк. Ширина линии H_α вызвана разностью лучевой скорости разных точек галактики, вращающейся вокруг её центра. Пусть края галактики вращаются вокруг него со скоростью v_r, тогда максимальная прибавка к лучевой скорости точки галактики, вызванная этим эффектом, составит v_r (на том краю диска галактики, который движется к нам), а минимальная $= -v_r$ (от нас):



Тогда max разность лучевых скоростей отдельных точек галактики равна $2v_r$, что соответствует максимальной разности смещения линии H_α для разных участков галактики 16 Å $\Rightarrow$ $\frac{16Å}{\lambda_0} = \frac{2v_r}{c} \Rightarrow v_r = \frac{c}{2}\cdot\frac{16Å}{\lambda_0} = \frac{3\cdot10^5\frac{км}{с}}{2}\cdot\frac{16Å}{6563Å} \approx 1{,}5\cdot10^5\frac{км}{с}\cdot\frac{1}{410} \approx$ ≈ 366 км/с – скорость вращения на окраине галактики $\Rightarrow$ $v_r = \sqrt{GM/R}$, где M – масса галактики, R – её радиус. Характерным радиусом спиральной галактики возьмём радиус Млечного Пути $\Rightarrow R \approx 16$ кпк. $\Rightarrow$ масса $M = \frac{v_r^2 R}{G}$. В предположении, что вся галактика состоит из похожих на Солнце звёзд оценим число звёзд в ней как $N = \frac{M}{M_\odot}$. Тогда светимость галактики L_r в N раз больше солнечной $L_\odot$, и если $M_\odot$ – абсолютная звёздная величина Солнца, M – галактики, то по ф-ле Погсона $\frac{L_r}{L_\odot} = N = 2{,}512^{M_\odot - M} \Rightarrow M = M_\odot - 2{,}5\cdot$ $\cdot\lg\frac{L_r}{L_\odot} = M_\odot - 2{,}5\lg N = M_\odot - 2{,}5\lg\frac{M}{M_\odot} = M_\odot - 2{,}5\lg\frac{v_r^2 R}{G\cdot M_\odot} = 4{,}72^m - 2{,}5\cdot$ $\lg\left(\frac{(366\ 000\ \frac{м}{с})^2\cdot 16\ 000\ пк}{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{Н\cdot м^2}{кг^2}\cdot 2\cdot10^{30}\ кг}\right) = 4{,}72^m - 2{,}5\lg\left(\frac{366\cdot366\cdot10^6\cdot16\cdot10^3\cdot206265\cdot150\cdot10^9}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}\right)$

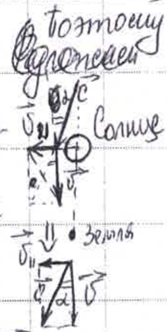
1 пк = 206265 а.е. = 206265 · 150 · 10^9 м

№3 (продолжение)

$M \approx 4{,}72 - 2{,}5\lg\left(\frac{6\cdot 366\cdot 10^6\cdot 16\cdot 10^3\cdot 2{,}06265\cdot 10^5\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}}{10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}\right) \approx 4{,}72 - 2{,}5\cdot \lg\left(\frac{6\cdot 366\cdot 10^6\cdot 16\cdot 10^3\cdot 3{,}1\cdot 10^5\cdot 10^{11}}{2\cdot 10^{19}}\right) \approx 4{,}72 - 2{,}5\cdot\lg\left(\frac{100\cdot 360\cdot 3\cdot 10^{25}}{2\cdot 10^{19}}\right) \approx 4{,}72 - 2{,}5\lg\left(\frac{3\cdot 360}{2}\cdot 10^8\right) = 4{,}72 - 2{,}5\cdot 8 - 2{,}5\lg(3\cdot 180) = 4{,}72 - 20 - 2{,}5\lg 540 = 4{,}72-20-2{,}5\cdot 2 - 2{,}5\lg 5{,}4 \approx 4{,}72-20-5-2{,}5\cdot 0{,}6 = 4{,}72-15-1{,}5 = 3{,}22-15 = -12{,}22^m$. Отсюда по формуле $M = m+5-5\lg r_{пк}$ можно найти m: $m = M-5+5\lg r_{пк} = -12{,}22-5+5\lg(857\cdot 10^6) \approx -17{,}2+5\cdot 6+5\lg 857 = -17{,}2+30+5\cdot 2+5\lg 8{,}57 = -17{,}2+40+5\lg 8{,}57 \approx 22{,}8+5\cdot 0{,}9 \approx 27^m$

№2

Эффект гравитационной линзы вызван тем, что свет, проходя мимо массивного объекта (например, Солнца) отклоняется в его сторону из-за притяжения этого объекта. Необходимо иметь скорость, большую II космической скорости v_{II} для этого объекта, чтобы пройти мимо него, а свет имеет скорость $c > v_{II}$ для Солнца, которое рассматривается, поэтому свет проходит дальше, но искривляется, тратя часть скорости на преодоление притяжения Солнца. Разложим начальную скорость света на некоторую часть ⊥ направлению на Солнце скорость v_{II}, которая тратится на преодоление действия гравитации Солнца, и часть, ⊥ этой $\vec{v}_{II}$, которая остается после прохода мимо Солнца (рис).

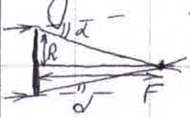


Так как $v_{II} \ll c$, то угол α, на который отклоняется свет, мал, отсюда $v \approx c$, $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha \Rightarrow \alpha \approx \frac{v_{II}}{c}$. $\alpha = \frac{v_{II}}{c}$. v_{II} определяется как $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Отсюда находим $\alpha = \sqrt{\frac{2GM}{R}}/c = \sqrt{\frac{2GM}{c^2R}}$, где R - радиус объекта, в данном случае, Солнца, M - его масса. Проверим это для Солнца: $\alpha = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot c^2}} =$

$\alpha = \frac{1}{3\cdot 10^8 \frac{м}{с}}\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{Н\cdot м^2}{кг^2}\cdot 2\cdot 10^{30}\,кг}{697\,000\ км}} = \frac{1}{3\cdot 10^8}\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 2\cdot 10^{19}}{697\,000\,000}} \approx \frac{1}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{\frac{4\cdot 10^{19}}{10^8}} = \frac{1}{3\cdot 10^8}\cdot 2\cdot\sqrt{10^{11}} \approx \frac{1}{3}\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^5\cdot\sqrt{10} \approx 2\cdot 10^{-3}$ рад, По условию для Солнца $\alpha = 1{,}75'' \approx 2'' =$

$= \frac{2''}{206265''}$ рад $\approx 10^{-5}$ рад $\Rightarrow$ Должно быть N2 (продолжение) $\alpha = \left(\sqrt{\frac{2GM}{c^2R}}\right)^2 = \frac{2GM}{c^2R}$

~~Если~~ Радиус объекта-линзы R, а фокусное расстояние F, свет, идущий от звезды параллельным пучком, в результате искривления на линзе собирается в некотором фокусе, отклонившись на угол α:



Видим, что $\sin\alpha = \frac{R}{F} \Rightarrow F = \frac{R}{\alpha} = R \cdot \frac{c^2R}{2GM} = \frac{c^2R^2}{2GM} \Rightarrow$

$F = \frac{c^2R^2}{2GM}$ (как и должно быть, $F \sim \frac{1}{M}$)