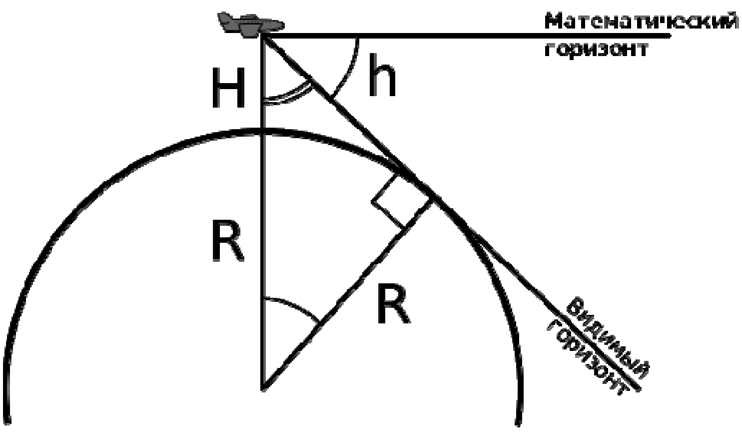
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Региональный этап, 2020 г.

9 класс

9.1. Условие. Самолет летит на высоте 10 км над поверхностью Земли 21 июня. Его пассажиры видят, как Солнце «замерло» и все время находится в точке севера на видимом горизонте. Определите скорость самолета. Рефракцией, поглощением света в атмосфере, угловыми размерами Солнца, рельефом и сжатием Земли пренебречь. (*О.С. Угольников*)

9.1. Решение. Солнце находится на северном горизонте, то есть в верхней или нижней кульминации для неподвижного наблюдателя. В этот момент суточное движение Солнца происходит параллельно горизонту. Движение самолета компенсирует вращение Земли, поэтому Солнце постоянно видно в точке кульминации. Его склонение вблизи летнего солнцестояния постоянно, поэтому можно сделать вывод, что самолет летел вдоль параллели. Нам нужно найти ее широту.

Хотя по условии задачи мы пренебрегаем рефракцией и видимыми размерами Солнца, мы должны учесть другой фактор: понижение видимого горизонта за счет высоты самолета.



Пусть самолет летит на высоте H над поверхностью Земли. Радиус Земли равен R. Угол h между направлениями на видимый и математический горизонты равен углу с вершиной в центре Земли между направлением на самолет и точку касания луча зрения пассажиров с поверхностью Земли (см. рисунок). Видимый горизонт будет иметь высоту

$$h = -\arccos\frac{R}{R+H} = -3.2^{\circ}.$$

Нам остается найти широту, на которой Солнце оказывается на высоте –3.2° под северным горизонтом, имея склонение ε (+23.4°). Если это была нижняя кульминация, то справедливо соотношение

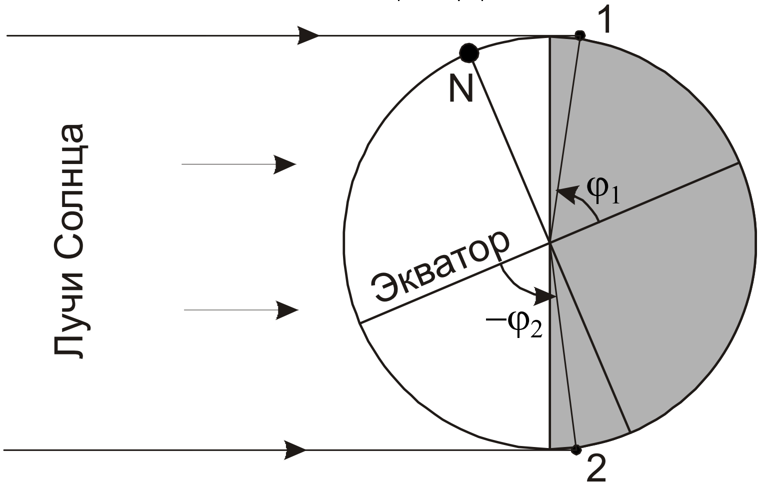
$$h = -90^{\circ} + |\varphi_1 + \varepsilon|,$$

причем выражение под знаком модуля должно быть положительно, так как кульминация происходит на севере. Тогда мы имеем

$$\varphi_1 = 90^{\circ} + h - \varepsilon = +63.4^{\circ}.$$

Сумма склонения и широты очевидно больше нуля, поэтому мы получили одно из решений. Это положение самолета соответствует цифре 1 на рисунке. Но кульминация Солнца могла быть и верхней, и тогда

$$h = 90° - |\varepsilon - \varphi_2|,$$



причем выражение под модулем должно быть вновь положительным. Тогда

$$\varphi_2 = -90° + \varepsilon + h = -69.8°.$$

Выражение под знаком модуля вновь положительно, это положение самолета 2 на рисунке. Итак, мы имеем два возможных значения широты. Так как речь идет о Солнце, самолет должен компенсировать осевое вращение Земли относительно направления на Солнце с периодом T = 1 сутки. Для этого требуется скорость

$$v_{1,2} = \frac{2\pi R \cos\varphi_{1,2}}{T}.$$

Два возможных значения скорости составляют 207 и 160 м/с.

9.1. Система оценивания.

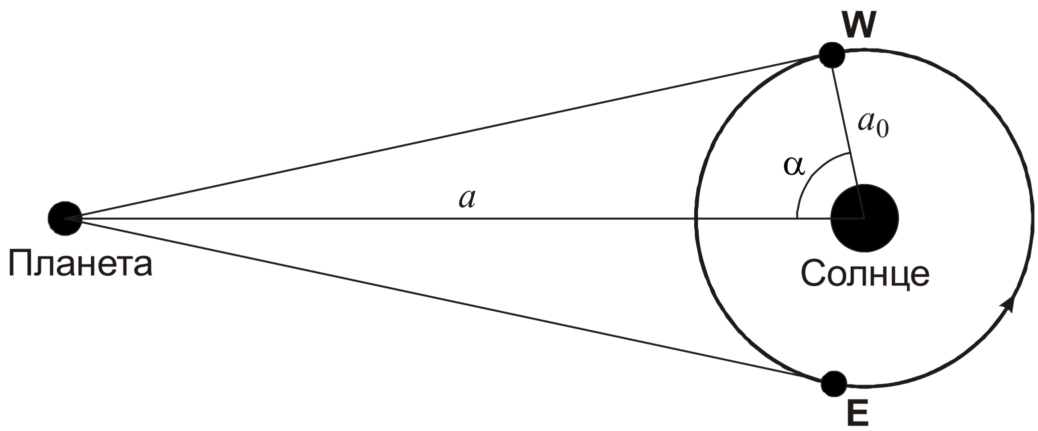
<u>1 этап – 2 балла:</u> учет эффекта понижения горизонта и вычисление его значения, по 1 баллу за каждое действие. Этап не засчитывается, и также уменьшаются оценки за последующие этапы, если эффект не учитывается в решении. Если величина понижения горизонта (3.2°) не вычисляется в явном виде, но правильно учитывается далее и приводит к верному ответу, этап засчитывается полностью.

<u>2 этап – 2 балла:</u> определение широты, на которой находился самолет. Выставляется по 1 баллу за каждое верное значение. Если не было учтено понижение горизонта, и в итоге получено значение широты полярного круга (с одним или двумя знаками) – за этап выставляется 1 балл при условии отсутствия иных ошибок.

<u>3 этап – 4 балла:</u> определение скорости самолета. 2 балла выставляется за использование правильной формулы и по 1 баллу – за каждое верное значение. Если не было учтено понижение горизонта, то для широты полярного круга должна быть определена скорость 184 м/с. В этом случае выставляется 2 балла за формулу и 1 балл за численное значение, то есть 3 балла за этап, если не сделано иных ошибок. Таким образом, все решение без учета понижения горизонта при правильном выполнении оценивается в 4 балла (0+1+3).

9.2. Условие. Между восточной квадратурой и последующей западной квадратурой некоторой планеты проходит в 1.143 раз больше времени, чем между ее западной и последующей восточной квадратурой. Что это за планета? Орбиты планет считать круговыми. (*Е.Н. Фадеев*)

9.2. Решение. Квадратуры происходят только у внешних планет, обращающихся вокруг Солнца дальше Земли с большим, чем у Земли, периодом. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с планетой. В этой системе Земля будет также вращаться вокруг Солнца, но с несколько большим (синодическим) периодом. В промежуток между западной (точка **W**) и восточной (точка **E**) квадратурой Земля должна пройти дугу с углом 2α. Между восточной и западной квадратурой Земля проходит угол $2(\pi - \alpha)$. Поэтому



$$k = 1.143 = \frac{\pi - \alpha}{\alpha}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\pi}{1+k} = 1.465 \text{ рад} = 84^{\circ}.$$

С другой стороны, как видно из рисунка, радиус орбиты планеты есть

$$a = a_0/\cos\alpha \approx 9.6 \text{ а.е.}$$

Здесь a_0 – радиус орбиты Земли. Значит, эта планета – Сатурн.

9.2. Система оценивания.

<u>1 этап – 5 баллов:</u> вычисление угла α или эквивалентной для решения величины, что является ключевым моментом задачи. Этап можно выполнить как во вращающейся системе отсчета, так и в неподвижной, с учетом движения обеих планет. Ошибка на данном этапе не влияет на оценку за последующие этапы.

<u>2 этап – 2 балла:</u> нахождение радиуса орбиты планеты (1 балл – формула, 1 балл – вычисление).

<u>3 этап – 1 балл:</u> указание планеты. Выставляется только в случае правильного выполнения предыдущих этапов: если планета Сатурн указана без верного обоснования, балл не выставляется.

9.3. Условие. Космический аппарат стартует с Земли к некоторой звезде, двигаясь к ней относительно Солнца со скоростью 200 км/с. Годичный параллакс звезды равен 0.1″. Через какое время звезда при наблюдении с аппарата станет ярче на 0.1^{m}? Считать, что звезда неподвижна относительно Солнца, ее светимость постоянна. (*О.С. Угольников*)

9.3. Решение. Для начала нужно сразу отметить, что скорость аппарата (200 км/с) очень велика, и аппарат покинет Солнечную систему, не испытав на себе существенного тормозящего влияния Солнца. Поэтому мы можем считать, что аппарат движется прямолинейно с постоянной скоростью, направленной к звезде. Параллакс звезды равен 0.1″, то есть изначальное расстояние до нее r_0 равно 10 пк. Чтобы звезда стала на 0.1^{m} ярче, по формуле Погсона расстояние до нее должно составить

$$r = r_0 \cdot 10^{-0.2 \cdot 0.1} = r_0 \cdot 0.955.$$

Иными словами, аппарат должен пролететь расстояние $(r_0 - r)$ = 0.45 пк или $1.4 \cdot 10^{13}$ км в сторону звезды. Для этого ему потребуется время

$$T = \frac{r_0 - r}{v} = 2200 \text{ лет}.$$

9.3. Система оценивания. Указание, что притяжение Солнца практически не изменяет скорость аппарата, не является обязательным. Если участник упоминает это, либо правильно учитывает понижение скорости (примерно на 2%), оценка не изменяется. Если же делается неверный вывод о существенном изменении, оценка снижается. При изменении скорости более, чем на 10%, оценка уменьшается на 3 балла. Решение разделяется на следующие этапы:

<u>1 этап – 2 балла:</u> определение расстояния до звезды либо правильный учет выражения для него в расчетах. Выставляется только в случае правильного ответа или вычислений. В случае ошибок более, чем в 10 раз, вне зависимости от причин, все последующие этапы засчитываются наполовину.

<u>2 этап – 4 балла:</u> определение расстояния, которое должен преодолеть аппарат, чтобы звезда стала на 0.1^{m} ярче. Если участник олимпиады неверно использует формулу Погсона, указывая в показателе степени 0.4 вместо 0.2 (то есть, считает яркость убывающей пропорционально первой степени расстояния), данный этап оценивается в 1 балл, остальные оцениваются в полной мере. Участник может также перепутать приближение к звезде с удалением и ее ослаблением на 0.1^{m}, что приведет практически к такому же значению расстояния (0.47 пк) и оценивается в 2 балла. При иных физических ошибках при выполнении этапа за него выставляется 0 баллов.

<u>3 этап – 2 балла:</u> нахождение требуемого времени. Необходимо правильно произвести перевод между различными единицами длины и времени. При ошибке более 20% этап полностью не засчитывается, при ошибке от 10% до 20%, вызванной арифметическими погрешностями, за этап выставляется 1 балл.

9.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение. (*О.С. Угольников*)

9.4. Решение. Угловое разрешение для невооруженного глаза человека с отличным зрением составляет примерно 1′. Предположим, что телескоп таков, что его дифракционный предел разрешения лучше 2″ – в дальнейшем мы сможем это проверить. Предел, который накладывает на разрешение спокойная атмосфера, также лучше – около 1″. Тогда мы можем заключить, что разрешение ограничено зрением наблюдателя, и тогда мы получаем, что увеличение телескопа M с тем окуляром, что используется в настоящий момент, составляет 30 крат.

Обозначим диаметр объектива как D, диаметр зрачка глаза как d. Пусть общее количество энергии, идущее через единичную площадку за единицу времени от участка неба, ограниченного полем зрения, составляет J. Тогда человеческий глаз за единицу времени примет с этого участка величину энергии $J\cdot\pi d^2/4$, а телескоп – $J\cdot\pi D^2/4$. Однако, в окуляре эта энергия будет распределена по увеличенной в M^2 раз площади. Из условия задачи имеем:

$$J\frac{\pi D^2}{M^2} = \frac{J\cdot\pi d^2}{2}.$$

Отсюда мы получаем величину диаметра объектива телескопа:

$$D = \frac{dM}{\sqrt{2}} = 17 \text{ см.}$$

Здесь диаметр зрачка d положен равным 8 мм. Если взять значение 6 мм, то диаметр объектива телескопа будет равен 12.7 см. Увеличение телескопа больше равнозрачкового (21 крат), и вся энергия, собираемая телескопом, попадает в глаз наблюдателя.

Нам также необходимо сделать проверку правильности предположения в начале решения. При диаметре объектива 12.7 см дифракционный предел разрешения составляет около 1″, при диаметре 17 см – еще лучше. Поэтому разрешающая способность действительно определялось зрением наблюдателя.

9.4. Система оценивания.

<u>1 этап – 3 балла</u>: определение увеличения телескопа. Для получения всех 3 баллов участник должен не просто вычислить его как отношение 1′/2″, но и указать, что другие факторы, ограничивающие разрешающую способность (дифракция, атмосферное дрожание) не играют роли. Без этого указания за первый этап выставляется только 1 балл. Если указание сделано, но несущественность дифракционного ограничения не проверена в конце решения – за этап ставится 2 балла. Правильное значение разрешающей способности глаза может быть взято в интервале от 0.8′ до 1.2′, Если участник задает разрешающую способность наблюдателя с отличным зрением хуже 1.2′, но не хуже 2′ – за этап снижается 1 балл, последующее решение оценивается в полной мере.

<u>2 этап – 5 баллов:</u> определение диаметра объектива телескопа. Этап можно выполнять также сравнивая увеличение с равнозрачковым, используя известный факт, что последнее не меняет поверхностную яркость протяженных объектов – доказательство этого факта не требуется. Значения диаметра зрачка глаза от 6 до 8 мм считаются правильными, при значениях от 4 до 6 мм и от 8 до 10 мм оценка снижается на 2 балла, при еще большей неточности за этап выставляется только 1 балл в случае правильных расчетов.

В качестве возможных ошибок при выполнении этапа участники могут предположить, что яркость протяженного объекта уменьшается пропорционально увеличению, а не его квадрату (в этом случае в итоговой формуле вместо увеличения будет стоять его квадратный корень). В этом случае этап оценивается в 2 балла, если не сделано иных ошибок. Участники могут вообще предположить, что увеличение не меняет поверхностную яркость, и получить диаметр объектива телескопа, меньший диаметра зрачка глаза. В этом случае этап не засчитывается полностью.

Участник олимпиады может также предположить, что разрешающая способность телескопа определяется только дифракцией, что при правильных расчетах даст диаметр объектива телескопа 7 см и увеличение 12 крат. В этом случае первый этап не засчитывается полностью, второй при правильных расчетах оценивается 4 баллами.

9.5. Условие. Две звезды сферической формы – белый карлик и нейтронная звезда (пульсар) – имеют одинаковые массы (1.2 массы Солнца) и радиусы 6000 и 10 км соответственно. Ускорение свободного падения на экваторе пульсара в 350 000 раз больше, чем на поверхности белого карлика. Найдите период вращения пульсара. Белый карлик не вращается, релятивистские эффекты не учитывать. (*О.С. Угольников*)

9.5. Решение. Ускорение свободного падения на экваторе звезды равно

$$g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R.$$

Как видно из этой формулы, оно уменьшается за счет осевого вращения звезды. Для белого карлика (радиус R) по условию задачи этого эффекта нет, но у нейтронной звезды с радиусом r он может играть заметную роль. Обозначим отношение ускорений свободного падения на экваторе у нейтронной звезды и белого карлика через K. Тогда

$$K = \frac{\dfrac{GM}{r^2} - \omega^2 r}{\dfrac{GM}{R^2}} = \frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\right).$$

Отношение R^2/r^2 равно 360 000, то есть центробежное ускорение на экваторе нейтронной звезды есть 1/36 от гравитационного. Тогда угловая скорость вращения нейтронной звезды равна

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}\left(1 - \frac{Kr^2}{R^2}\right)} = 2.1 \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}.$$

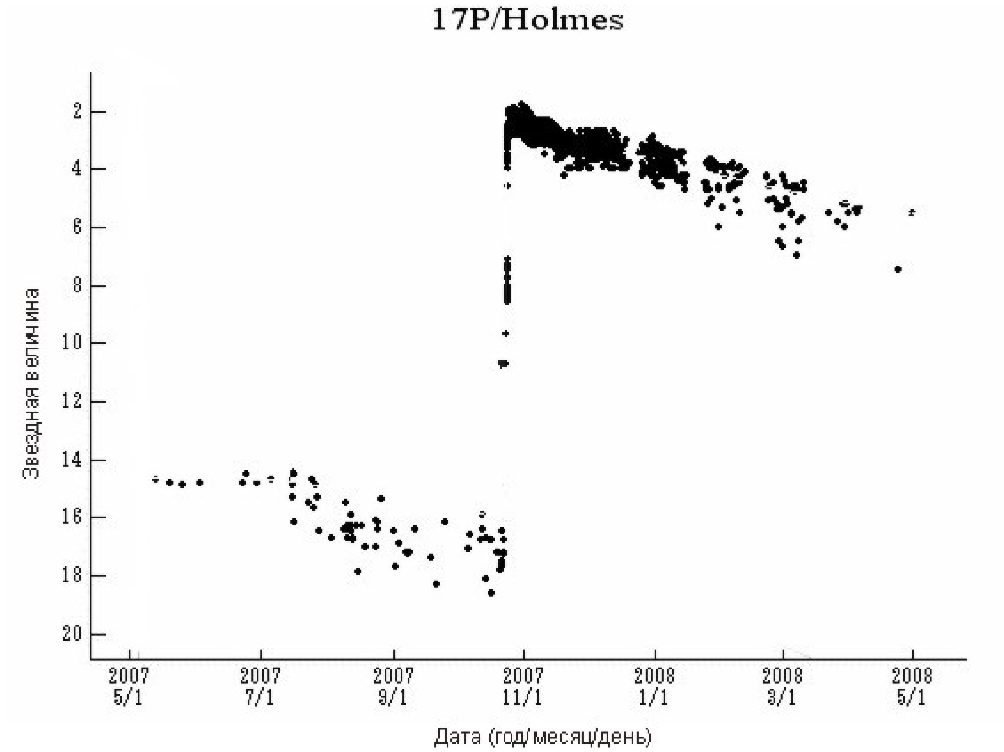
Период вращения T составляет $2\pi/\omega$, то есть 3 мс.

9.5. Система оценивания.

<u>1 этап – 4 балла</u>: правильная запись выражения для ускорения свободного падения на экваторе в явном виде либо через выражения для "центробежной силы". 1 балл выставляется за правильное выражение для белого карлика, 3 балла – за выражение для нейтронной звезды. Если в последнем случае не учитывается вращение, все 3 балла не выставляются.

<u>2 этап – 4 балла</u>: вычисление периода вращения пульсара. Вывод правильной формулы оценивается в 2 балла. Вычисление правильного ответа – еще в 2 балла. Если ответ отличается от данного в решении на 0.1 мс и более (по любой причине, в частности, из-за отсутствия учета отличия массы нейтронной звезды от солнечной), последние 2 балла не выставляются.

9.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е. (*О.С. Угольников*)



9.6. Решение. По графику мы видим, что звездная величина кометы Холмса прямо перед взрывом составляла 17^m, взрыв увеличил ее до 2^m, то есть на 15 звездных величин. В соответствии с формулой Погсона это означает, что комета стала ярче в K раз:

$$K = 10^{0.4\,(17-2)} = 10^6.$$

Мы считаем, что до взрыва комета представляла собой одно единое тело размером D и объемом V. Если это тело разобьется на N осколков, которые мы для простоты считаем одинаковыми, то каждый из них будет иметь средний объем V/N и размер $d=(V/N)^{1/3}=D\cdot N^{-1/3}$. Видимая яркость одного осколка j будет пропорциональна его видимой площади, то есть d^2. Суммарная яркость всех осколков составит

$$J \sim N\,d^2 = N\,D^2\,N^{-2/3} = N^{1/3}\,D^2 \sim N^{1/3}\,J_0.$$

Здесь J_0 – яркость монолитного ядра до взрыва. Получается, что для увеличения видимой яркости в K раз ядро должно разбиться на $N=K^3=10^{18}$ осколков. Необходимо отдельно оговорить, что размер кометного ядра вряд ли превосходит 10 км, поэтому средний осколок будет иметь размер 1 см и угловой размер с расстояния 1 а.е. порядка угловой микросекунды. При видимых размерах роя порядка нескольких минут 10^{18} частиц будут располагаться на угловых расстояниях порядка 0.5 миллисекунд дуги и практически не будут перекрывать друг друга.

Комета удалена от Земли на расстояние L, равное 1.6 а.е. Мы можем определить пространственный радиус комы через $\tau = 1$ неделю после взрыва: $R = L\,\delta/2 = 0.003$ а.е. = = 450 тыс.км. Так как взрыв был изотропным, кому можно считать сферической. Тогда концентрация осколков через неделю после взрыва равна

$$n_0 = 3N / 4\pi R^3 = 2.6\ \text{км}^{-3}.$$

9.6. Система оценивания. Решение задачи разбивается на четыре основных этапа, которые могут производиться в разной последовательности:

<u>1 этап – 2 балла:</u> определение величины усиления яркости кометы из графика (1 балл за определение звездных величин до и после вспышки, требуемая точность 0.5^m, 1 балл за применение формулы Погсона и определения соотношения яркостей). Если при решении допускается смысловая ошибка (например, непонимание шкалы звездных величин и ее связи с яркостью), то вне зависимости от ответа данный этап полностью не засчитывается.

<u>2 этап – 2 балла:</u> восстановление связи между величиной усиления яркости и количеством осколков кометного ядра, определение количества осколков. Участник олимпиады может брать данную связь как известную. При ошибочной связи (иной характер, нежели $J \sim N^{1/3}$) этап решения полностью не засчитывается. Если же ошибка настолько сильна, что связь оказывается обратной (яркость уменьшается при росте числа осколков) или очень резкой (яркость увеличивается как N или еще резче), итоговая оценка за все решение не может превышать 4 баллов.

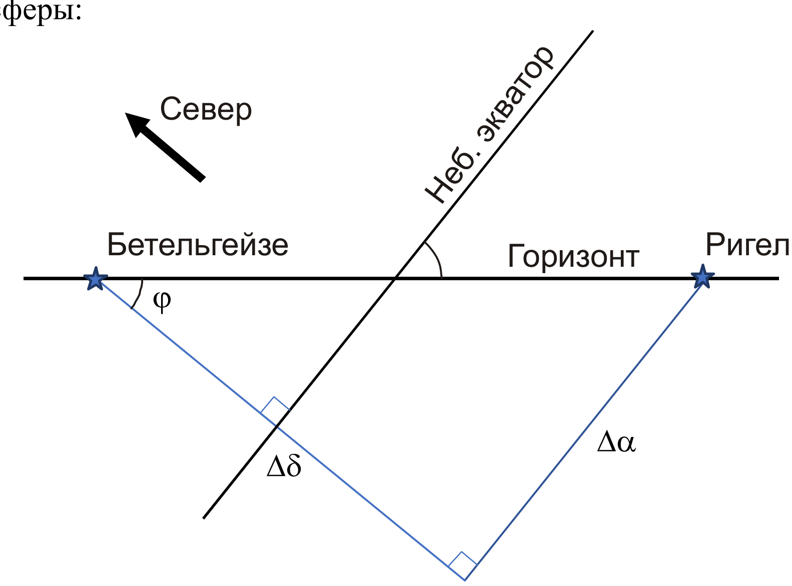
<u>3 этап – 2 балла:</u> определение радиуса облака осколков через неделю после взрыва либо правильная запись выражения для него. Если участник путает видимый диаметр и радиус облака с ошибкой в размерах вдвое и итогового ответа – в 8 раз, данный этап не засчитывается, но последний засчитывается в полной мере.

<u>4 этап – 2 балла:</u> определение концентрации осколков. Допустимая точность выполнения (без учета ошибок, сделанных на предыдущих этапах) – 10%, для выставления 1 балла – 20%.. При ответе, отличающемся от правильного более, чем в 10 раз, вне зависимости от причин, итоговая оценка не может превышать 4 баллов.

10 класс

10.1. Условие. В некотором пункте на поверхности Земли звезды Бетельгейзе и Ригель в созвездии Ориона взошли одновременно. Экваториальные координаты Бетельгейзе $05^ч55.2^м$, $+7°24'$; координаты Ригеля $05^ч14.5^м$, $-8°12'$. Найдите широту места наблюдения. Атмосферной рефракцией пренебречь. (*И.А. Утешев*)

10.1. Решение. В момент одновременного восхода Бетельгейзе и Ригель одновременно пересекли линию горизонта, плоскость которого образует с плоскостью небесного экватора угол $90°-\varphi$, где φ – широта места наблюдения. Точка пересечения находится между этими звездами, на небольшом угловом расстоянии от каждой из них. Поэтому картину вполне можно считать плоской. Построим чертеж, пренебрегая кривизной рассматриваемого участка небесной сферы:



Наблюдатель, очевидно, находится в северном полушарии, поскольку северный полюс мира находится над горизонтом. Из геометрии чертежа видно, что

$$\tan\varphi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta},$$

где $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ – разность координат Бетельгейзе и Ригеля. Отсюда

$$\varphi = \arctan\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = 33^{\circ}.$$

10.1. Система оценивания. Приведенный выше способ решения не является единственным. Задание можно решить напрямую, используя формулы сферической тригонометрии. Правильное решение в этом случае необходимо засчитывать полностью (8 баллов). В случае ошибок в записи самих формул максимальная оценка за все решение не превышает 4 баллов, при ошибках вычисления при правильных формулах оценка не превышает 6 баллов. При способе решения, описанном выше, система оценивания следующая:

<u>1 этап – 2 балла:</u> правильная связь горизонтальной и экваториальной системы координат (угол наклона одной к другой), выраженная рисунком или формулой.

2 этап – 3 балла: запись соотношения широты и разности координат звезд. Засчитывается только при правильной формуле, в других случаях этап не засчитывается.

3 этап – 3 балла: значение широты. Засчитывается при верном решении. При правильных формулах и ошибке больше 5° выставляется 2 балла, при ошибке больше 10° этап не засчитывается. Если широта записана с неверным знаком или допускается ответ с двумя знаками широты, то при правильном модуле широты этап оценивается в 1 балл, иначе этап не засчитывается.

10.2. Условие. Между восточной квадратурой и последующей западной квадратурой некоторой планеты проходит в 1.143 раз больше времени, чем между ее западной и последующей восточной квадратурой. Что это за планета? Орбиты планет считать круговыми.

10.2. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задание 9.2.

10.3. Условие. Желая испытать новое сверхмощное импульсное оружие, а также привести в порядок календарь, жители Земли решили отодвинуть Луну от нашей планеты так, чтобы тропический год содержал ровно 12 синодических лунных месяцев (циклов смены лунных фаз). Какое минимальное значение эксцентриситета нужно будет задать новой лунной орбите, чтобы у землян хотя бы иногда осталась возможность наблюдать полные солнечные затмения с поверхности планеты? Орбиту Земли считать неизменной в ходе испытания. Направление вращения Луны вокруг Земли также сохраняется прежним. (*О.С. Угольников*)

10.3. Решение. Требуемая длительность синодического лунного месяца S' есть 1/12 от тропического года T_0 или 30.437 дня. Тогда длительность сидерического лунного месяца (оборота Луны вокруг Земли) будет

$$T' = \frac{S' T_0}{S' + T_0} = \frac{T_0}{13} = 28.096 \text{ сут}.$$

Сравнивая его с настоящим периодом T, мы применяем III закон Кеплера и находим новое среднее расстояние до Луны:

$$L' = L\left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3} = 391.6 \text{ тыс. км}.$$

Отметим, что и в настоящее время Луна может располагаться на таком расстоянии от Земли. Так как в условии задачи требуется, чтобы у землян хоть когда-нибудь была возможность наблюдать полное солнечное затмение, мы рассмотрим наиболее благоприятный случай. Пусть Земля находится в афелии своей орбиты, при этом во время затмения Солнце и Луна располагаются в зените. Тогда угловой радиус Солнца будет равен

$$\rho = \frac{R_S}{a(1+e_0)} = 0.00458 \text{ рад}.$$

Здесь R_S – радиус Солнца, a – среднее расстояние от Земли до Солнца, e_0 – эксцентриситет орбиты Земли. Приближение наблюдателя к Солнцу за счет размеров Земли здесь несущественно, но в случае Луны оно уже будет играть роль. Чтобы полное солнечное затмение случилось, Луна в перигее в зените должна иметь хотя бы такой же угловой радиус:

$$\rho = \frac{R_L}{L'(1-e) - R_E}.$$

Здесь R_E и R_L – радиусы Земли и Луны. Отсюда получаем минимальное значение эксцентриситета лунной орбиты:

$$e = \frac{R_S(L' - R_E) - R_L a(1+e_0)}{L' R_S} = 0.015.$$

Получается, что лунная орбита может быть почти круговой, и сохранение нынешнего эксцентриситета также позволит землянам наблюдать полные солнечные затмения.

10.3. Система оценивания.

<u>1 этап – 2 балла:</u> определение большой полуоси орбиты Луны для выполнения условия задания. Оба балла не выставляются, если участник путает синодический и сидерический периоды Луны. В случае арифметической ошибки при правильных формулах ($T'=T_0/13$ и выражение III закона Кеплера) выставляется 1 балл.

<u>2 этап – 6 баллов:</u> определение минимального эксцентриситета орбиты Луны. Оценка зависит от учета двух факторов, важных для условий наступления полного солнечного затмения – эллиптичности орбиты Земли (добавка $+e_0$ во втором составляющем числителя) и приближения наблюдателя к Луне (добавка $-R_E$ в первом слагаемом). Учет каждого из слагаемых оценивается по 2 балла. При этом учет каждого из факторов не засчитывается (оба балла не выставляются), если они записаны с противоположным знаком. Решение второго этапа без учета или с неправильным учетом этих слагаемых оценивается не выше 2 баллов.

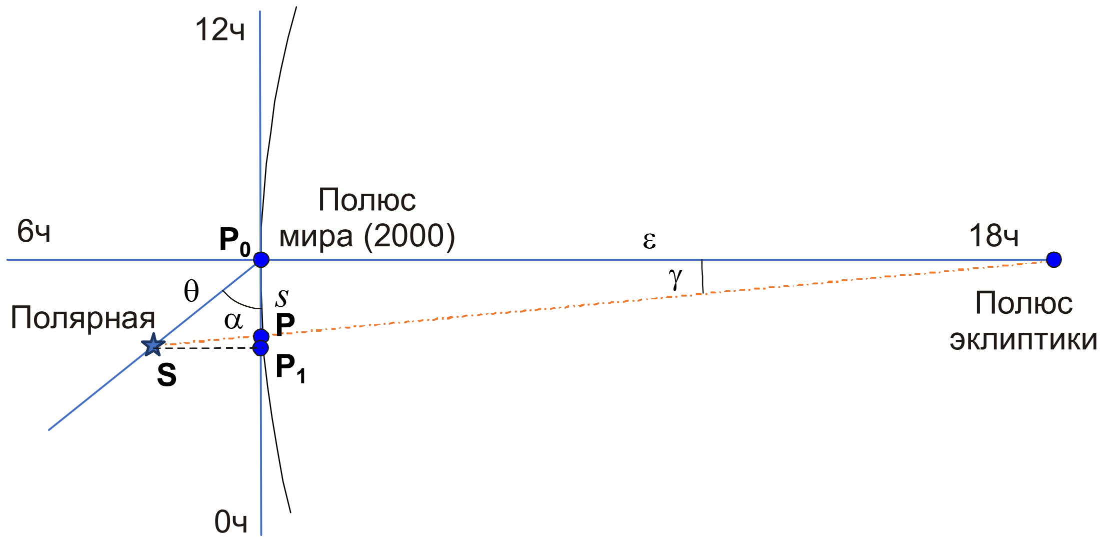
Если первый или второй этап был выполнен с ошибкой, в результате которой на втором этапе получается вывод, что эксцентриситет может быть любым, даже нулевым, либо же он должен быть большим, не менее 0.1, общая оценка не может превышать 2 баллов.

10.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение.

10.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

10.5. Условие. В настоящее время положение северного полюса мира отмечает собой довольно яркая звезда α Малой Медведицы (Полярная). 1 января 2000 года ее экваториальные координаты – прямое восхождение и склонение – были равны соответственно $02^ч31^м48.7^с$, $+89°15'51.0''$. Из-за прецессии земной оси с периодом 25776 лет положение Северного полюса мира медленно изменяется. Определите, в каком году полюс пройдет мимо Полярной на минимальном угловом расстоянии. Оцените это угловое расстояние. Собственное движение звезды и нутацию не учитывать. (*И.А. Утешев*)

10.5. Решение. Северный полюс мира описывает вследствие прецессии окружность вокруг Северного полюса эклиптики в созвездии Дракона, с радиусом ε=23.4° и заданным периодом. Изобразим это движение:



Решение можно производить с различной степенью точности. Пренебрежем кривизной рассматриваемого участка небесной сферы (в районе полюса мира) и рассмотрим две разных по точности модели. В одной из них полюс мира движется по окружности с центром в полюсе эклиптики, а в другой – по касательной к ней прямой (см. рисунок). В этих двух случаях максимальное сближение с Полярной звездой произойдет в точках **P** и $\mathbf{P_1}$ соответственно. Обозначим текущее угловое расстояние Полярной звезды от полюса мира (90°–δ) как θ. Из теоремы косинусов определим расстояние от Северного полюса эклиптики до Полярной:

$$\rho^2 = \varepsilon^2 + \theta^2 - 2\,\varepsilon\theta\cos(\alpha + \pi/2);$$
$$\rho \approx \varepsilon\sqrt{1 - 2\theta\cos(\alpha + \pi/2)/\varepsilon} \approx \varepsilon + \theta\cos(\pi/2 - \alpha).$$

Во втором выражении мы использовали тот факт, что θ<<ε. Получается, что в более сложной модели минимальное расстояние между Полярной звездой и северным полюсом мира составит

$$\rho - \varepsilon = \theta\sin\alpha = 27.15'.$$

Интересно, что такой же ответ мы получаем в простой модели из анализа прямоугольного треугольника $\mathbf{P_0P_1S}$. Чтобы определить длину пути северного полюса мира до ближайшей к Полярной звезде точки, в более сложной модели нужно воспользоваться теоремой синусов, считая дугу s_0 отрезком прямой линии:

$$s_0 = \varepsilon\sin\gamma = \varepsilon\sin(\pi/2 + \alpha)\frac{\theta}{\rho} = \theta\cos\alpha\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \theta\sin\alpha}.$$

В простой модели последний множитель обращается в единицу, и из того же прямоугольного треугольника мы получим s_1=θcosα. Значения s_0 и s_1 получаются равными 34.2′ и 34.8′ соответственно, здесь разница двух моделей уже заметна. Дальнейшие вычисления мы можем также производить в плоском приближении, считая траекторию полюса мира окружностью с радиусом ε, и тогда, зная дугу, пройденную по кругу прецессии

$$\gamma_{0,1} = \frac{s_{0,1}}{\varepsilon},$$

мы определяем время, которое потребуется для такого смещения:

$$t_{01,11} = T\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T \cdot s_{0,1}}{2\pi\varepsilon}.$$

Здесь T – период прецессии. Можно рассуждать несколько по-иному, определив проекцию отрезка s на малом круге небесной сферы радиусом ε на большой круг – эклиптику:

$$S_{0,1} = s_{0,1} / \sin \varepsilon.$$

Прецессия земной оси (движение точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики) происходит с угловой скоростью $\Omega=2\pi/T$, что соответствует известной величине 50.3″ в год. Отсюда мы определяем время, за которое точка весеннего равноденствия пройдет дугу S:

$$t_{00,10} = \frac{S_{0,1}}{\Omega} = T\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T \cdot s_{0,1}}{2\pi \sin \varepsilon}.$$

От предыдущей модели эти выражения отличаются тем, что вместо угла ε в радианной мере в знаменателе фигурирует его синус. Итак, мы имеем четыре модельных значения искомого времени:

Радиус круга движения полюса мира	Учет кривизны пути полюса мира	Без учета кривизны полюса мира
sin ε	t_{00} = 102.8 лет, 2102 год	t_{10} = 104.6 лет, 2104 год
ε	t_{01} = 99.9 лет, 2099 год	t_{11} = 101.7 лет, 2101 год

Реальный момент максимального сближения на 27′ приходится на 2102 год. Интересно, что наиболее простой метод вычислений (значение t_{11}) вследствие компенсации двух погрешностей дает ответ, близкий к наиболее точному (t_{00}).

10.5. Система оценивания. Как видно из приведенного выше решения, его можно производить с разной степенью точности, причем самый простой из предложенных способов, благодаря частичной компенсации двух погрешностей, дает хороший ответ, приближенный к точному. Решение задания четко разбивается на два основных этапа.

<u>1 этап – 3 балла:</u> определение минимального углового расстояния между Полярной звездой и северным полюсом мира, точность 1′. Как видно из предложенного решения, простая модель с прямолинейным движением полюса с высокой точностью дает тот же ответ, что и более сложная модель. Этап оценивается полностью в случае правильных вычислений, вне зависимости от модели. В случае арифметической ошибки при правильных формулах выставляется 2 балла (погрешность до 2′) или 1 балл (погрешность более 2′).

<u>2 этап – 5 баллов:</u> определение времени максимального сближения полюса и звезды на небе. Оценка определяется точностью используемой модели. В случае использования наиболее простой модели с прямолинейным движением полюса на плоском небе (оценка времени t_{11}) максимальная оценка за этап при отсутствии ошибок составляет 3 балла. Еще 1 балл выставляется за учет кривизны линии движения полюса, также 1 балл добавляется за учет фактора sin ε (вместо самого угла ε) при расчете длины дуги, описываемой полюсом.

При решении участники могут предположить, что полюс мира движется в противоположную сторону (в направлении с прямым восхождением 12ч), что при дальнейших верных рассуждениях приведет его к выводу, что полюс прошел на минимальном угловом расстоянии от Полярной звезды около 100 лет назад и пройдет вновь через 25676 лет. В таких решениях может быть засчитан первый этап (если угловое расстояние определено верно), а за второй выставляется не более 1 балла. При иных неверных направлениях движения полюса эклиптики общая оценка за все решение не может превышать 1 балла.

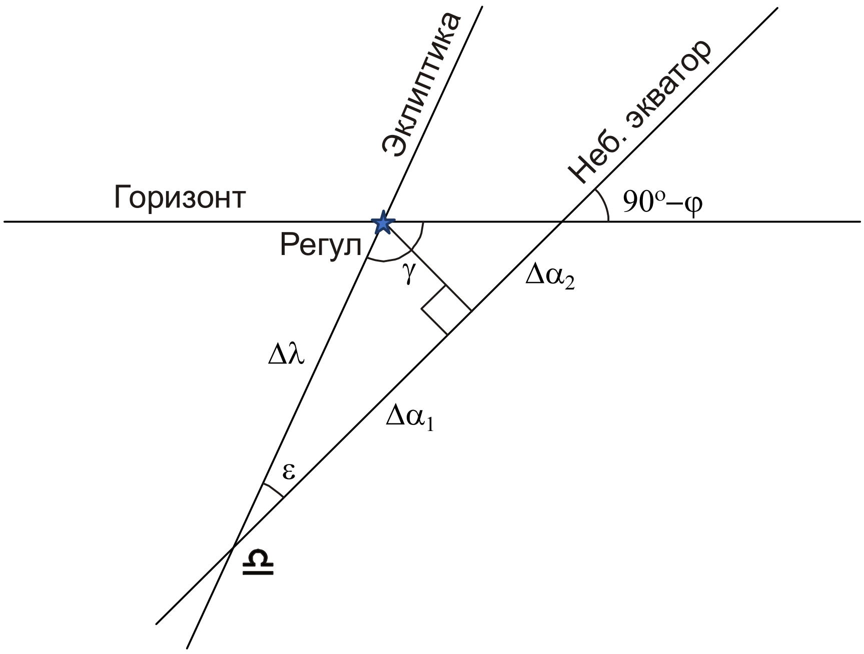
10.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е.

10.6. Решение и система оценивания. **См. 9 класс, задача 9.6.**

<u>11 класс</u>

11.1. Условие. Эклиптическая долгота Регула, ярчайшей звезды созвездия Льва, равна 150°, эклиптическая широта 0°. Определите среднее солнечное время его восхода 20 марта в Сочи (43.5° с. ш., 39.7° в. д.). Рефракцией, уравнением времени и рельефом местности пренебречь. (*И.А. Утешев*)

11.1. Решение. В день весеннего равноденствия точка осени восходит в $18^ч$ по местному времени. Построим чертёж, пренебрегая кривизной рассматриваемого участка небесной сферы:



Здесь ε – угол наклона эклиптики к земному экватору, φ – широта места наблюдения. Исходя из чертежа, можно сделать вывод, что Регул восходит раньше точки осеннего равноденствия благодаря двум факторам: прямое восхождение Регула меньше $12^ч$ (вдоль эклиптики он отстоит от точки осеннего равноденствия к западу на 2 часа), а его склонение положительно (следовательно, он восходит одновременно с точкой небесного экватора, имеющей меньшее, чему у звезды, прямое восхождение). Отсюда имеем:

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\lambda \cos\varepsilon;$$
$$\Delta\alpha_2 = \frac{\Delta\lambda \sin\varepsilon}{\tan(90^\circ - \varphi)} = \Delta\lambda \sin\varepsilon \tan\varphi;$$
$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = \Delta\lambda \frac{\cos\varepsilon \cos\varphi + \sin\varepsilon \sin\varphi}{\cos\varphi} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

Другой способ определить величину $\Delta\alpha$ состоит в рассмотрении треугольника, образованного Регулом, точкой осеннего равноденствия и точки востока (пересечения экватора с горизонтом). В этом треугольнике угол с вершиной в положении Регула равен

$$\gamma = (180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \varepsilon) = 90^\circ + \varphi - \varepsilon.$$

Применяя теорему синусов, получаем

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \Delta\lambda \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos\varphi}.$$

В результате имеем разницу во времени восхода в 2ч35м *звездного* времени, что, впрочем, в пределах погрешности расчетов совпадает и с разницей по *солнечному* времени. Восход Регула произойдет в 15ч25м по среднему солнечному времени.

11.1. Система оценивания. Приведенный выше способ решения не является единственным. Задание можно решить напрямую, используя формулы сферической тригонометрии. В этом случае ответ составляет около 15ч20м, правильное решение засчитывать полностью (8 баллов). В случае ошибок в записи самих формул максимальная оценка за все решение не превышает 4 баллов, при ошибках вычисления при правильных формулах оценка не превышает 6 баллов. Решение, описанное выше, разделяется на этапы:

<u>1 этап – 2 балла:</u> правильное представление взаимного расположения горизонта, экватора и эклиптики, выраженные рисунком или формулами (1 балл – расположение экватора относительно горизонта, 1 балл – расположение эклиптики относительно экватора и/или горизонта, значение эклиптической долготы опорной точки, в решении выше – точки осеннего равноденствия).

<u>2 этап – 4 балла:</u> построение методики определения разницы прямых восхождений Регула и точки осеннего равноденствия или иной величины, позволяющей определить время восхода. Возможны разные способы решения треугольника, два из них описаны выше. При неправильном построении метода этап не засчитывается.

<u>3 этап – 2 балла:</u> вычисление времени восхода Регула. Выставляются при верной методике. Требуемая точность – 10 минут, при ошибке до 20 минут за этап выставляется 1 балл.

11.2. Условие. 11 ноября 2019 года произошло прохождение Меркурия по диску Солнца, в ходе которого внутренняя планета прошла на небе практически через центр диска звезды. Считая, что это прохождение было в точности центральным, а Меркурий находился в перигелии своей орбиты, оцените, сколько солнечной энергии (в джоулях) недополучила Земля в связи с этим событием. Альбедо Земли не учитывать. (*И.А. Утешев*)

11.2. Решение. «Заморозим» движение Земли вокруг Солнца, перейдя в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца с угловой скоростью, равной орбитальной угловой скорости Земли, систему отсчета.

В этой системе из орбитальной скорости Меркурия в перигелии ($a_М$ – большая полуось орбиты планеты, e – эксцентриситет, $r_М$ – перигелийное расстояние Меркурия)

$$v_М = \sqrt{\frac{GM}{a_М}\frac{1+e}{1-e}} = 59.03 \text{ км/с}$$

вычитается поправка, связанная с вращением системы отсчета

$$v_Т = r_М\omega_0 = a_М(1-e)\cdot\frac{2\pi}{T_0} = 9.15 \text{ км/с}.$$

Здесь ω_0 и T_0 – угловая скорость и период обращения Земли. Чтобы пересечь диск Солнца в небе Земли, Меркурий, находящийся ближе к нам, должен пройти в пространстве его диаметр, умноженный на отношение $(a_0 - r_М)/a_0$. Для этого потребуется время

$$T = \frac{2R_S}{v_М - v_Т}\cdot\frac{a_0 - r_М}{a_0} = 1.93\cdot 10^4 \text{ с} = 5.37 \text{ ч}.$$

Здесь R_S – радиус Солнца. Относительное падение освещённости на Земле, обусловленное тем, что Меркурий закрывает часть видимой солнечной поверхности, равно отношению видимых угловых площадей Меркурия и Солнца:

$$K = \pi\left(\frac{R_М}{a_0 - r_М}\right)^2 \Bigg/ \pi\left(\frac{R_S}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{R_М}{R_S}\cdot\frac{a_0}{a_0 - r_М}\right)^2 = 2.6\cdot 10^{-5}.$$

При обычной своей освещенности Солнцем (солнечная постоянная A_0 = 1360 Дж/м^{2}с) Земля за время прохождения «потеряет»

$$Q = T\cdot K\cdot A_0\cdot\pi R_0^2 = 9\cdot 10^{16} \text{ Дж}.$$

Здесь R_0 – радиус Земли.

11.2. Система оценивания.

<u>1 этап – 5 баллов:</u> определение длительности прохождения Меркурия по диску Солнца. Может выполняться как в неподвижной, так и во вращающейся вместе с Землей системе отсчета. При решении могут быть допущены следующие ошибки:

1) Длительность прохождения Меркурия берется как известная, в частности, на примере прохождения 11 ноября 2019 года (5.5 часов). Это противоречит условию задачи (центральное прохождение в перигелии орбиты), поэтому этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.

2) Не учтен эксцентриситет орбиты Меркурия. В случае круговой орбиты длительность явления составила бы 6.5 часов. То же самое, если он учтен, но с другим знаком (Меркурий оказывается в афелии орбиты), и тогда длительность превышает 8 часов. В этих случаях первый этап при отсутствии иных ошибок оценивается в 3 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.
3) Не учтено движение Земли, в этом случае длительность прохождения оказывается меньшей, около 4.5 часов. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.
4) При расчете длительности прохождения считается, что Меркурий должен пройти путь, равный диаметру Солнца, что увеличивает длительность до 7 часов. В этом случае этап оценивается в 2 балла, последующий этап при условии верного выполнения оценивается полностью.
5) При одновременном появлении любых двух ошибок из перечисленных выше этап не засчитывается полностью (0 баллов).

<u>2 этап – 3 балла:</u> нахождение дефицита солнечной энергии. При выполнении этапа участник может принять, что соотношение видимых диаметров Меркурия и Солнца такое же, как соотношение их пространственных диаметров (не учитывая приближение Меркурия к Земле). Это допущение примерно вдвое уменьшает искомый эффект, за 2 этап выставляется не более 1 балла. Если же приближение учитывается, но с использованием среднего или афелийного расстояния Меркурия от Солнца (ответ в этом случае увеличивается на 20% и 40% соответственно), за этап выставляется не более 2 баллов.

Участники олимпиады могут предположить, что Меркурий задержит часть солнечной энергии, равную отношению видимых диаметров Меркурия и Солнца в первой степени. В этом случае второй этап решения не засчитывается (0 баллов).

11.3. Условие. Астероид сферической формы, принадлежащий Солнечной системе, ударился в Землю с максимально возможной скоростью, а перед этим в течение суток он был виден в небе Земли невооруженным глазом. Считая грунт астероида аналогичным лунному, определите радиус астероида. (*О.С. Угольников*)

11.3. Решение. Коль скоро астероид принадлежит Солнечной системе, его гелиоцентрическая скорость вблизи Земли не могла превышать параболическую скорость $v\sqrt{2}$ = 42.1 км/с. Здесь v – круговая скорость на орбите Земли, равная 29.8 км/с. Считая орбиту Земли круговой, мы получаем, что максимальная скорость соударения Земли и астероида (встречного) составляет

$$u = v(\sqrt{2} + 1) = 71.9 \text{ км/с.}$$

В течение суток траектории Земли и астероида можно считать прямыми линиями. Обозначив этот период времени как t, определяем расстояние между Землей и астероидом за сутки до столкновения L = ut = 6.21 млн км. Обратим внимание, что за сутки до удара астероид располагался на том же расстоянии от Солнца, а в небе Земли располагался в 90° от Солнца с западной стороны – только при таком положении возможно его столкновение с Землей с максимальной относительной скоростью. Поэтому по условиям освещения Солнцем и отражения света к Земле он не отличался от Луны в последней четверти. Последняя, как известно из справочных данных, имеет блеск m_0=–10. Астероид же в это время был на пределе видимости невооруженным глазом, его звездная величина составляла m=6.

Видимая яркость астероида и Луны различается из-за их разных размеров и расстояния до Земли, остальные характеристики одинаковы. Тогда по формуле Погсона:

$$m - m_0 = 2.5\lg\frac{R^2L^2}{r^2L_0^2} = 5\lg\frac{RL}{rL_0}.$$

Здесь L_0 – расстояние от Луны до Земли, R – радиус Луны. В итоге, получаем значение радиуса астероида:

$$r = R\frac{L}{L_0}10^{-0.2(m-m_0)} = 17 \text{ км}.$$

Описанная в условии ситуация представляла бы колоссальную опасность для дальнейшего существования земной цивилизации. Тем не менее, такой астероид был бы виден глазом в небе Земли только в последние сутки перед столкновением.

11.3. Система оценивания.

<u>1 этап (3 балла):</u> определение максимальной скорости удара астероида. Она может быть взята как известная, что также засчитывается. Если участник вместо нее берет гелиоцентрическую скорость (42 км/с), встречную круговую скорость (около 60 км/с) или скорость догоняющего астероида (12 км/с), этап полностью не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере. Участникам не нужно учитывать увеличение геоцентрической скорости астероида из-за притяжения Земли, так как оно скажется только непосредственно перед ударом и даже там будет меньше 1 км/с. Если ускорение астероида анализируется и делается вывод о его несущественности, оценка не изменяется. Если же увеличенная на 1 км/с скорость предполагается для движения астероида за все предшествующие сутки, оценка снижается на 2 балла.

<u>2 этап (1 балл):</u> правильное определение расстояния до астероида за сутки до столкновения в виде числового ответа или формулы, если подстановка чисел происходит только на последнем этапе, из которой ясно следует правильность вычислений.

<u>3 этап (4 балла):</u> вычисление радиуса астероида. Если участники олимпиады не учитывают фазовый эффект и сравнивают астероид с полной Луной, получая при правильных вычислениях ответ около 5 км, этот этап оценивается в 2 балла. Если фаза учитывается, но как двукратное уменьшение яркости астероида, что приводит к ответу 14 км, за этап выставляется не более 3 баллов.

При ошибочном применении формулы Погсона, в частности, уменьшение коэффициента вдвое, что соответствует убыванию яркости пропорционально первой степени расстояния, оценка за 3 этап не превышает 1 балл. То же самое относится, если яркость объекта пропорциональна первой степени радиуса объекта. При одновременно появлении любых двух из описанных выше ошибок этап полностью не засчитывается.

11.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение.

11.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

11.5. Условие. Черные шары с одинаковой плотностью 1 г/см^3 и радиусами 50 и 100 мкм запущены со скоростью 29.8 км/с (круговой скоростью движения Земли) в одинаковом направлении перпендикулярно направлению на Солнце на расстоянии 1 а.е. от него. Каким будет расстояние между этими шарами через 1 год? Взаимодействие шаров с планетами и друг с другом не учитывать. (*А.Н. Акиньщиков*)

11.5. Решение. Как мы видим, скорость шаров равна круговой (первой космической) скорости для данного расстояния от Солнца. Их орбита была бы круговой, если бы на них действовало только притяжение Солнца. Однако, размеры шаров невелики, и заметное влияние на их движение может оказывать сила светового давления. Каждый фотон солнечного излучения передает черному шару свой импульс, который равен E/c, где E – энергия фотона, а c – скорость света. Таким образом, если через единичную площадь за единицу времени проходит количество солнечной энергии, равное I, то все эти фотоны будут иметь суммарный импульс, равный I/c. Сила давления солнечного излучения на черный шар радиусом r, удаленный от Солнца на расстояние L, составит

$$F_{\mathrm{v}} = \frac{J \cdot \pi r^2}{4\pi L^2 c} = \frac{J r^2}{4 L^2 c}.$$

Здесь J – светимость Солнца, L – расстояние от Солнца до шара. В то же время, гравитационное воздействие от Солнца на шар составляет:

$$F_{\mathrm{G}} = -\frac{GM}{L^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \cdot \rho}{3}.$$

Здесь M – масса Солнца, ρ – плотность шара. Знак "–" указывает на то, что гравитационное действие противоположно световому по направлению. Равнодействующая сил притяжения и светового давления составит

$$F = F_{\mathrm{G}} + F_{\mathrm{v}} = -\frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} + \frac{J r^2}{4L^2 c} = -\frac{4\pi GM\rho r^3}{3L^2} \cdot \left(1 - \frac{3J}{16\pi\, GM\rho c r}\right) = -\frac{4\pi\, GM\rho\, r^3}{3L^2}(1-K).$$

Здесь K – величина отношения модулей светового и гравитационного действия:

$$K = \left|\frac{F_{\mathrm{v}}}{F_{\mathrm{G}}}\right| = \frac{3J}{16\pi\, GM\rho c r} = \frac{r_0}{r}.$$

Это отношение не зависит от расстояния от Солнца до шара и оказывается равным единице при радиусе r_0=0.58 мкм. Наши две частицы имеют большие радиусы, и для них величина светового давления составит 1.16% и 0.58% от гравитационного соответственно. Их движение можно описать как движение в чисто гравитационном поле, но с уменьшенной массой $M^*=M\cdot(1-K)$. Очевидно, что скорость частиц v, равная круговой скорости для полной массы Солнца, здесь будет больше круговой, и движение будет происходить по эллипсу, для которого точка запуска будет точкой перигелия:

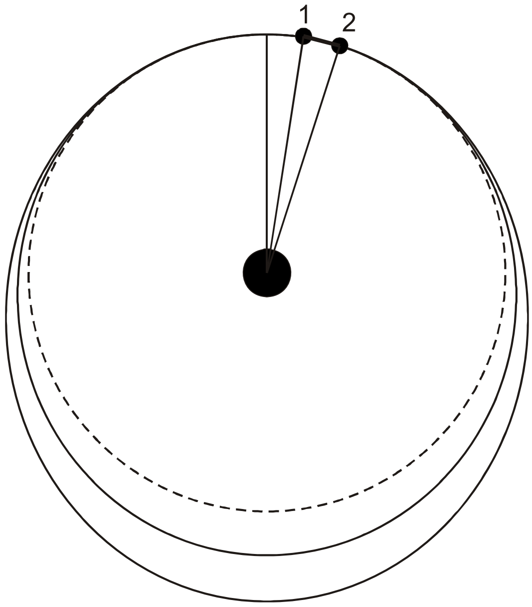
$$v^2 = \frac{GM}{L} = \frac{GM(1-K)}{L}(1+e).$$

Отсюда мы получаем выражение для эксцентриситета:

$$e = \frac{K}{1-K}.$$

Поскольку точка запуска является точкой перигелия, можно записать $a_0 = a\ (1-e)$, откуда большая полуось орбиты в астрономических единицах составит $a/a_0 = 1/(1-e)$. Период обращения в годах мы можем определить из III закона Кеплера с учетом изменившейся массы:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{(1-e)^3(1-K)}} = \sqrt{\frac{(1-K)^3}{(1-2K)^3(1-K)}} = \frac{1-K}{\sqrt{(1-2K)^3}} \approx 1+2K.$$



В итоге, через один год (время T_0) частица не завершит свой оборот, для этого ей еще потребуется время

$$t = T - T_0 = 2KT_0 = \frac{2T_0 r_0}{r}.$$

Расстояние между шарами составит

$$d = v(t_1 - t_2) = 2vT_0 r_0\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 4\pi r_0\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\text{ а.е.} = 0.073\text{ а.е.}$$

Отметим, что если бы мы произвели вычисления без приближений в последних трех формулах, мы бы получили ответ 0.076 а.е.

Нам нужно оговориться, что на движение пылинок будет влиять также эффект Пойнтинга-Робертсона, связанный с тем, что в системе отсчета движущейся пылинки световое давление будет направлено не от Солнца, а под малым углом $\gamma = v_0/c$ к этому направлению. В итоге, солнечное излучение создаст тормозящую силу, равную

$$F_{\mathrm{PR}} = -F_{\mathrm{v}}\gamma = -\frac{J\,r^2 v_0}{4L^2c^2}.$$

Можно показать, что это приведет к приближению пылинки к Солнцу. За один оборот это приближение ΔL будет равно

$$\Delta L = -L \cdot \frac{3J\,v_0}{16GMc^2\rho r} = -L\frac{\pi\,v_0 r_0}{cr}.$$

Это смещение по порядку величины есть (v_0/c) от расстояния вдоль орбиты, определенного ранее. Для рассматриваемых в этой задаче пылинок смещение к Солнцу за один оборот составит менее 10^{-5} а.е. и роли не играет.

11.5. Система оценивания.

<u>1 этап (2 балла):</u> Вычисление, насколько изменится эффективная сила притяжения к Солнцу за счет светового давления для заданных двух частиц. Возможно использование записи формул в общем виде или ввода величины радиуса, для которого световое давление полностью компенсирует гравитацию, r_0, что упрощает все выкладки. Точность величины r_0 или соотношения силы светового давления и гравитации – 10%. При больших ошибках данные 2 балла не выставляются, если же сами выкладки производились из неверных соображений, неправильно учитывающих физику процесса – оценка за дальнейшие этапы не превышает 50% от максимума.

<u>2 этап (4 балла):</u> Определение периода обращения каждой из пылинок и/или расстояния от исходной точки, на которой она окажется через год. Необходимо отметить, что период обращения увеличивается за счет двух факторов: эллиптической орбиты (увеличение большой полуоси в III законе Кеплера) и уменьшения массы (также входящей в III закон Кеплера). Если участник принимает во внимание только один из факторов, то итоговое расстояние уменьшается на 25% или 75% в зависимости от учтенного фактора. В этом случае оценка за данный этап уменьшается до 2 баллов, при этом выполнение последнего этапа оценивается не выше 1 балла. Вычисления можно производить приближенно, как описано выше, и точно, разница в ответе составляет около 5%. Требуемая точность вычислений – 10%, при ошибке до 20% оценка за этап уменьшается на 2 балла.

<u>3 этап (2 балла):</u> Вычисление правильного расстояния между пылинками. Оценивается полностью только в случае верного выполнения предыдущих этапов задания.

Упоминание эффекта Пойнтинга-Робертсона в решении не является обязательным. Если он оценен верно, и сделан вывод о его несущественности, это не влияет на оценку. В случае ошибочного утверждения об его принципиальности оценка уменьшается в зависимости от полученной степени вклада этого эффекта. При выводе о сопоставимости смещения частиц за счет эллиптичности орбит и эффекта Пойнтинга-Робертсона оценка уменьшается вдвое.

11.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е.

11.6. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.6.