XXII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2015

28 февраля

9 класс

1. Первые успешные попытки измерить расстояние до звезд были предприняты тремя астрономами: В. Струве в Дерптской обсерватории, Ф. Бесселем в Кенигсбергской обсерватории и Т. Хендерсоном в Капской обсерватории. Каждый из них выбрал для наблюдений одну звезду: Вегу, 61 Лебедя и α Центавра соответственно. Назовите критерии, которыми руководствовались эти астрономы при выборе звезд, и объясните свой ответ.

Решение:

Первый способ измерения расстояний до звезд (и единственный чисто геометрический, не привлекающий для получения результата никаких данных о светимостях звезд, которых в первой половине XIX века, когда работали Струве, Бессель и Хендерсон, еще не было) — метод годичного параллакса. Для определения расстояния требовалось обнаружить видимое смещение звезды на небесной сфере, связанное с тем, что астроном, движущийся вместе с Землей вокруг Солнца, наблюдает звезду из разных точек.

Величина годичного параллакса обратно пропорциональна расстоянию до звезды, поэтому проще всего заметить и измерить параллакс (а, следовательно, и расстояние) ближайших к Солнцу звезд, поэтому при выборе объекта для наблюдений требовалось по каким-то косвенным признакам выбрать звезду, которая с большой вероятностью будет сравнительно близкой к Солнцу.

Первый, наиболее очевидный признак — видимый блеск. Если считать, что все звезды в среднем имеют примерно одинаковую светимость (что на самом деле не так, диапазон возможных светимостей оказывается достаточно большим), то наиболее близкие звезды, по-видимому, следует искать среди наиболее ярких для земного наблюдателя. По этому критерию были выбраны α Центавра (3-я по яркости звезда неба) и Вега (5-я по яркости).

Второй признак — большое собственное движение звезды. Если предположить, что все звезды в среднем движутся с примерно одинаковыми пространственными скоростями относительно Солнца (что куда ближе к действительности, чем предыдущее предположение), то собственное движение звезды на небесной сфере, как угловая скорость, будет в среднем обратно пропорционально расстоянию до звезды. Следовательно, если выбрать звезды с максимальными собственными движениями, то вероятность найти среди них близкие будет достаточно высокой. По этому критерию были выбраны 61 Лебедя (с максимально известным в то время собственным движением) и та же α Центавра (также один из рекордсменов по этому параметру).

Однако почему среди кандидатов не было, например, Сириуса (который ярче и α Центавра, и Веги)? Есть еще одно дополнительное условие: поскольку положение звезды на небесной сфере надо было определять в течение года, крайне желательным был выбор звезд, находящихся далеко от плоскости эклиптики — так, чтобы их можно было наблюдать каждую ясную ночь. По той же причине наиболее предпочтительными оказывались звезды, незаходящие за горизонт в месте наблюдения. В самом деле, склонения Веги и 61 Лебедя близки $+39^\circ$, и в Калининграде (бывший Кенигсберг) и Тарту в Эстонии (бывший Дерпт) обе звезды не заходят под горизонт. α Центавра имеет склонение -61°, но в Капской обсерватории (находившейся на южной оконечности Африки, рядом с Кейптауном) эта звезда также незаходящая.

Все три работы были успешно завершены. Причем Томас Хендерсон, который, в отличие от коллег, проводил наблюдения в Южном полушарии, смог выбрать звезду, удовлетворяющую всем трем требованиям. Этот выбор оказался самым удачным из возможных – как выяснилось в дальнейшем, α Центавра является ближайшей к Солнцу звездой, ее годичный параллакс максимален.

2. Два искусственных спутника Земли с одинаковым периодом обращения, равным 12 часам, столкнулись. Оцените максимально возможную скорость их столкновения.

Решение:

Поскольку период обращения каждого из спутников P известен, можно вычислить большую полуось их орбит a, воспользовавшись III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Скорость каждого из спутников на расстоянии r от центра Земли определяется с помощью т.н. «интеграла энергии» (одной из форм записи закона сохранения энергии)

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Очевидно, что раз спутники столкнулись, то они находились на одном и том же расстоянии от центра Земли, поэтому скорости у них были одинаковыми. Максимальной скоростью столкновения в таком случае будет $V = 2v$ — когда спутники перед столкновением летели навстречу друг другу. Поэтому

$$V = 2\sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{2a}{r} - 1\right)}.$$

Заметим, что $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ — это скорость движения спутника по круговой орбите радиуса a, поэтому полученное выражение можно переписать как

$$V = 2v_0\sqrt{\frac{2a}{r} - 1}.$$

Таким образом, для того, чтобы оценить максимальную скорость столкновения, надо найти минимальное расстояние r — расстояние в перигее орбиты. Очевидно, что это расстояние должно быть больше радиуса Земли. Кроме этого, ниже высот $150 \div 200$ км над поверхностью Земли спутники тоже не летают, мешает атмосфера, однако эта добавка мала по сравнению с радиусом Земли. Поэтому в качестве оценки минимально возможного r можно взять радиус Земли или, например, $6400 \div 6600$ км.

Осталось провести вычисления. Можно, конечно, просто подставить в полученные формулы известные числовые данные и получить ответ, однако, поскольку требуется получить оценку результата, лучше подумать, как это можно было бы сделать эффективнее.

Многие помнят, что период обращения вокруг Земли низкоорбитального спутника (летящего по круговой орбите на высоте $150 \div 200$ км над поверхностью Земли, с радиусом орбиты, практически равным радиусу Земли) составляет примерно 1.5 часа, а скорость его движения практически равна первой космической, т.е. 8 км/с. Из III закона Кеплера следует, что большая полуось орбиты спутника a пропорциональна его периоду P в степени 2/3 (т.е. $a \propto P^{2/3}$). Период 12 часов в 8 раз больше периода 1.5 часа, поэтому большая полуось орбит сталкивающихся спутников больше радиуса Земли $R_\oplus$ примерно в $8^{2/3} = 4$ раза. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2a}{r} - 1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4R_\oplus}{R_\oplus} - 1} = \sqrt{7} \approx 2.5.$$

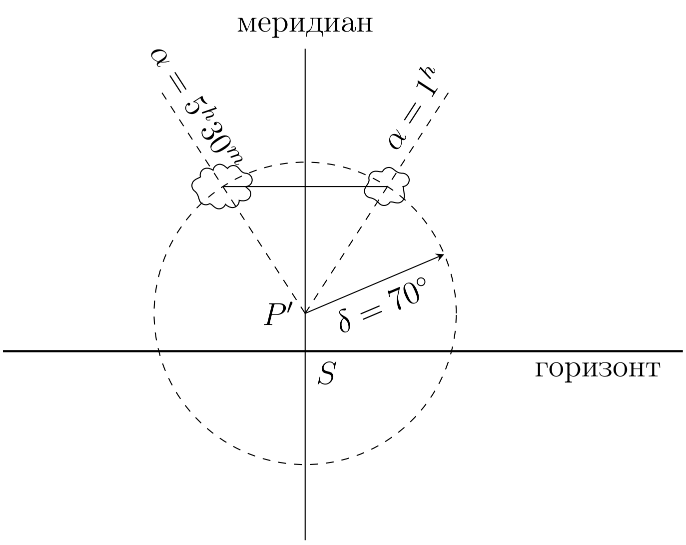
Как уже упоминалось выше, скорость движения по круговой орбите $v_0 \propto 1/\sqrt{a}$. Если большая полуось орбиты в четыре раза больше радиуса Земли, то скорость v_0 в два раза меньше первой космической, т.е. примерно 4 км/с. Таким образом, осталось лишь вычислить $V = 2 \cdot 4$ км/с $\cdot\, 2.5 = 20$ км/с. Это и есть искомый ответ («честное», но заметно более трудоемкое вычисление дает 20.6 км/с).

Заметим, что несколько более грубую оценку можно было бы получить вообще почти без вычислений. Поскольку период низкоорбитального спутника, как мы уже выяснили, существенно меньше периода спутников из условия задачи, то отсюда следует, что если перигей орбиты расположен недалеко от поверхности Земли, орбиты спутников должны быть достаточно сильно вытянуты (в самом деле, хотя в данной задаче это и не требуется, можно оценить эксцентриситет орбит, он $e \approx 3/4$). А это означает, что в окрестности перигея скорости спутников близки к параболическим — т.е., поскольку перигей находится рядом с поверхностью Земли, ко второй космической скорости, равной 11 км/с. Отсюда сразу же следует, что скорость столкновения равна примерно 22 км/с (или несколько меньше — таким путем мы получаем завышенную оценку). Как видно, этот результат не так уж сильно отличается от предыдущего.

3. В ночь перед наблюдением солнечного затмения 14 ноября 2012 года на севере Австралии астроном заметил, что Магеллановы Облака можно использовать в качестве часов. В некоторый момент он взглянул на небо и увидел, что линия, соединяющая Облака, параллельна горизонту. Сколько часов астроному оставалось ждать до наступления затмения, если известно, что затмение началось на рассвете? Большое Магелланово Облако имеет координаты: прямое восхождение $\alpha_1 = 5^h30^m$ и склонение $\delta_1 = -70°$, а Малое — $\alpha_2 = 1^h00^m$, $\delta_2 = -70°$.

Решение:

Северная Австралия находится практически на экваторе, т.е. южный полюс там находится очень невысоко над горизонтом. Магеллановы облака имеют одинаковое склонение, причем находятся близко к полюсу. Таким образом, картина, которую видит астроном, примерно такая:



Из рисунка очевидно, что в тот момент, когда астроном взглянул на небо, в верхней кульминации находилась (пересекала небесный меридиан) точка с прямым восхождением $(5^h30^m - 1^h)/2 = 3^h15^m \approx 3^h$.

Чтобы узнать, где в этот момент находилось Солнце, нужно оценить (опять же, с точностью до часа) его прямое восхождение. Можно считать, что прямое восхождение Солнца возрастает от 0^h в день весеннего равноденствия примерно на $1°$ в день. Таким образом 14 ноября (это примерно 53 день от осеннего равноденствия) прямое восхождение Солнца примерно равно:

$$12^h + 6^h \frac{53}{91} \approx 15^h.$$

Разность прямых восхождений Солнца и точки, находящейся в верхней кульминации, равна примерно 12^h, следовательно, Солнце также находится в кульминации, только в нижней, т.е. это был момент местной истинной солнечной полуночи. С необходимой нам точностью можно считать, что в приэкваториальных широтах Солнце восходит примерно в одно и то же время в течение всего года. (В действительности разность между моментами восхода Солнца в дни равноденствий и солнцестояний в северной Австралии составляет примерно полчаса.) Это время равно 6^h по истинному местному солнечному времени. Так как в начальный момент истинное местное солнечное время равно 0^h, то до рассвета, а, следовательно, и до затмения, астроному остается ждать 6 часов.

4. В двух одинаковых галактиках вспыхнули две одинаковые сверхновые типа SN Ia, причем в максимуме блеска видимая звездная величина сверхновой в первой галактике оказалась равной $+15^m$, а сверхновой во второй — $+17^m$. Какая из галактик находится дальше от Земли? Найдите отношение расстояний до этих галактик. На сколько звездных величин отличаются суммарные видимые звездные величины этих галактик?

Решение:

Сверхновые одинаковы, поэтому разница в видимых звездных величинах обусловлена только разным расстоянием до них. При этом вторая сверхновая слабее, следовательно, она находится дальше.

Из определения видимой звездной величины известно, что освещенности, создаваемые объектами, звездные величины которых отличаются на единицу, различаются примерно в 2.5 раза (более точно в $\sqrt[5]{100} \approx 2.512\ldots$). Таким образом, разница на две звездных величины означает разницу в освещенностях в 2.5^2 раз. Однако освещенность, создаваемая точечным источником света, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него. Следовательно, сверхновая во второй галактике (а с ней и сама галактика) находится от Земли в 2.5 раза дальше первой.

Поскольку галактики одинаковы, то разность их звездных величин также определяется только разницей в расстояниях. При этом, поскольку вторая галактика находится в 2.5 раза дальше первой, ее звездная величина также на 2^m больше, чем у первой галактики.

5. На краю видимого с Земли диска Солнца одновременно появились два солнечных пятна, причем одно находилось на экваторе Солнца, а другое — на гелиографической широте $45°$. Найдите угловое расстояние между пятнами (для земного наблюдателя) в тот момент, когда первое из них достигнет центрального меридиана на диске Солнца. Угловая скорость вращения пятен $\omega = \omega_0\,(1 - b \cdot \sin^2\varphi)$, где $\omega_0 = 2.9 \cdot 10^{-6}$ Гц, $b = 0.19$, φ — гелиографическая широта.

Решение:

Из информации в условии задачи видно, что пятно, находящееся на экваторе (с $\varphi = 0°$) будет двигаться быстрее, поэтому первым до центрального меридиана доберется именно оно. Пятно на экваторе движется с угловой скоростью ω_0, а пятно на широте $\varphi = 45°$ — со скоростью

$$\omega_1 = \omega_0\,(1 - b \cdot \sin^2\varphi) = \omega_0\,(1 - b \cdot (\sqrt{2}/2)^2) = \omega_0\,(1 - 0.19/2) \approx 0.9\omega_0.$$

Таким образом, когда первое пятно пройдет 90° — четверть экватора — по долготе, второе пятно успеет пройти только $90^\circ \cdot 0.9 = 81^\circ$ и окажется на расстоянии 9° от центрального меридиана. Заметим, что информация о конкретном значении ω_0 для получения этого вывода совершенно не нужна (хотя из нее, при желании, можно найти, например, период вращения Солнца вокруг своей оси на разных широтах).

Теперь найдем угловое расстояние между центром диска Солнца (в котором находится первое пятно) и вторым пятном. В направлении по широте пятно будет смещено от центра диска на расстояние $R\sin 45^\circ$, где R — угловой радиус диска Солнца. Аналогичным образом смещение в направлении по долготе составит $R\sin 9^\circ$. Для получения окончательного результата воспользуемся теоремой Пифагора, тогда общее смещение составит

$$\Delta R = R\sqrt{\sin^2 45^\circ + \sin^2 9^\circ} \approx R\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^2,$$

где мы воспользовались тем, что синус малого угла, выраженный в радианах, примерно равен самому углу. Видно, что смещение по долготе мало влияет на итоговый результат, поэтому $\Delta R = R/\sqrt{2}$. Радиус диска Солнца составляет примерно $15'$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, поэтому $\Delta R \approx 11'$. Получение результата с большей точностью не имеет смысла, поскольку характерные угловые размеры пятен на Солнце составляют десятые доли минуты (диаметры пятен сравнимы с диаметром Земли и на два порядка меньше диаметра Солнца).

Примечание: Итоговый ответ задачи, вообще говоря, получается очень простым способом. Однако существенной частью решения является обоснование того, что «лишними» данными (а ими является, по сути, вся информация о вращении Солнца) для получения ответа с разумной точностью можно пренебречь.