XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур, решения

2018

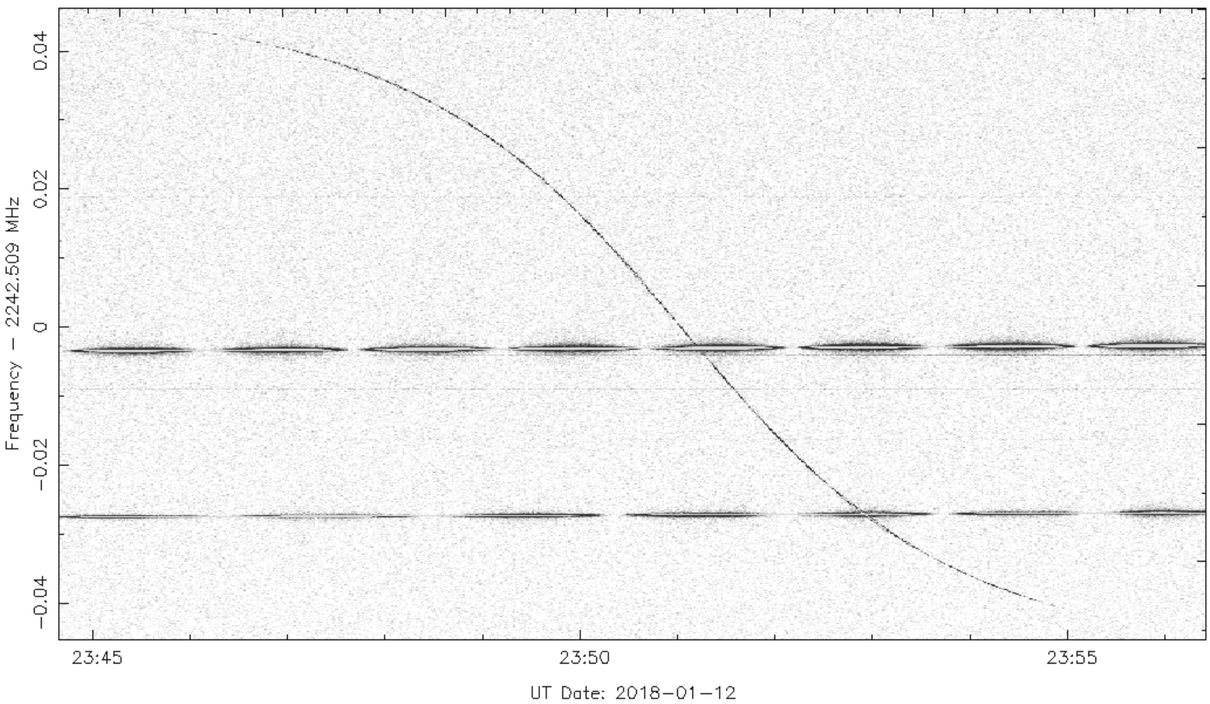
4 марта

10 класс

Радионаблюдатель из Амстердама (широта $\varphi = 52°$, долгота $\lambda = 5°$, первый часовой пояс) зафиксировал пролет неизвестного спутника в своем небе 12 января 2018 года, причем спутник прошел через зенит, а угол между точками восхода и захода спутника составлял 180°. График интенсивности принятого радиосигнала в зависимости от времени и частоты представлен ниже. Определите:

- большую полуось орбиты спутника;
- эксцентриситет орбиты спутника;
- угол наклона орбиты спутника к земному экватору;
- ближайший момент (по местному гражданскому времени), когда радионаблюдатель мог снова зарегистрировать этот же спутник при помощи своего приемника.

Время (по оси абсцисс) указано в часах и минутах, частота (по оси ординат) — в мегагерцах, причем из частоты вычтена постоянная константа 2242.509 МГц.



Решение:

На графике явно видны две горизонтальные радиополосы, являющиеся результатом приема сигнала от радиоисточников, находящихся на поверхности Земли (скорее всего, это передатчики сотовой вышки). Поэтому «полезный сигнал» со спутника — явно выраженный кусочек синусоиды. Смещение сигнала спутника по частоте вызвано эффектом Доплера, связанным с наличием у спутника лучевой скорости v_r:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_r}{c},$$

где $\Delta\nu$ — смещение частоты от центральной ν_0 (собсвтенная частота передатчика, установленного на спутнике), а c — скорость света. Таким образом, точка, в которой частота принимаемого сигнала равна чатоте излучаемого (эта же точка является центром кусочка синусоиды) является точкой орбиты спутника, в которой его скорость строго перепендикулярна лучу зрения, то есть это момент прохождения через зенит.

По графику можно определить $\Delta\nu = 0.045$ МГц (в зависимости от качества печати может получиться значение 0.04, что не считалось ошибкой), что по формуле для эффекта Допплера дает значение лучевой скорости $v_r = 4.5/2.24 \times 10^{-5} \cdot 3 \times 10^5$ км/с $\approx \pm 6$ км/с в моменты захода и восхода соответственно. Из симметричности графика сигнала и его близости к синусоиде можно заключить, что лучевая скорость меняется у спутника лишь из-за наличия угла между линейной скоростью спутника и лучом зрения.

Так как атмосфера в радиодиапазоне прозрачна, то можно считать, что самая левая точка на графике — вылет спутника из-за горизонта, соответственно, правая точка — заход спутника за горизонт. По нижней оси видно, что спутник был доступен для наблюдения в течение отрезка времени $\tau \approx 11$ минут. За такое время Земля поворачивается на незначительный угол (около $3°$), поэтому вращением Земли вокруг своей оси можно пренебречь. Максимальная поправка в лучевую скорость из-за вращения Земли составляет 0.5 км/с на экваторе, а с учетом широты — не более 0.3 км/с, что для нашей точности вполне приемлемо.

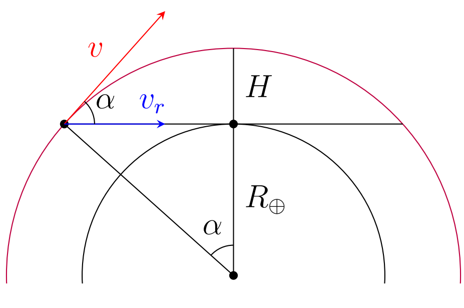
Не умаляя общности, можно сказать, что спутник взошел в точке востока, а зашел в точке запада. Действительно, из-за вращения Земли вокруг своей оси орбита спутника будет поворачиваться относительно наблюдателя, так что такой момент когда-нибудь настанет. Тогда момент кульминации спутника в зените означает, что **угол наклона орбиты равен широте места:** $i = \varphi = 52°$.

Исходя из симметрии графика можно заключить, что в момент прохождения через зенит спутник также проходит через апоцентр или перицентр своей орбиты. Можно попытаться аккуратно расписать, как соотносятся скорости и расстояния в момент восхода спутника и мгновенная линейная скорости через элементы эллиптической орбиты. При этом все равно придется воспользоваться некоторыми упрощениями (например, что расстояние до поверхности во время видимости спутника не меняется или что в в момент восхода спутника его скорость можно считать равной скорости в перицентре). Все это может излишне усложнить решение задачи, а при неаккуратности в подсчетах привести к заведомо нефизичному ответу (например, что большая полуось орбиты спутника окажется меньше радиуса Земли). Так что для простоты рассмотрим случай круговой орбиты.

Модуль лучевой скорости на заходе и восходе определен ранее: $v_r = 6$ км/с, а скорость спутника, исходя из предположения выше, считаем круговой:

$$v = \sqrt{GM_\oplus / a}$$

Здесь G — гравитационная постоянная, $M_\oplus$ — масса Земли, $a = R_\oplus + H$, $R_\oplus$ — радиус Земли, H — высота спутника над поверхностью). Тогда для понимания связи между этими величинами полезно нарисовать рисунок:



Из рисунка очевидна связь:

$$\frac{v_r}{v} = \cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H} = \frac{R_\oplus}{a},$$

что с учетом выражения для круговой скорости дает

$$v_r a^{3/2} = R_\oplus \sqrt{GM_\oplus}.$$

Тогда радиус орбиты вычисляется (в СИ):

$$a = \sqrt[3]{\frac{R_\oplus^2}{v_r^2} GM_\oplus} = \sqrt[3]{\frac{(6.4 \times 10^6)^2}{(6 \times 10^3)^2} \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.4^2 \cdot 6.67}{6} \times 10^{12-6-11+24}} \approx \sqrt[3]{455} \times 10^6 \text{ м} \approx 7700 \text{ км}.$$

Итак, **радиус орбиты спутника** $a = 7700$ **км**. Это значение не очень велико, и, в принципе, позволяет нам сказать, что предположение о круговой орбите было верным, и **эксцентриситет** $e = 0$.

Используя третий уточненный закон Кеплера, можно вычислить период обращения спутника вокруг Земли:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_\oplus}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_\oplus^2}{v_r^2}} = \frac{2\pi R_\oplus}{v_r} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6400}{6} \approx 112^m = 1.9^h.$$

Тогда можно получить синодический период спутника S, если он движется в противоположную (знак минус) сторону (в этом случае угол наклона орбиты спутника формально равен $i = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$), или в ту же, что и Земля (знак плюс):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1.9^h} \pm \frac{1}{24^h} \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{1.9 \cdot 24}{24 \pm 1.9} \approx 1.7^h \text{ или } 2.1^h,$$

что означает, что в следующий раз спутник взойдет в $1^h\ 37^m$ или в $1^h\ 51^m$ 13 января 2018 года UT. С учетом того, что Голландия живет в поясе UTC+1 (несмотря на долготу — так же, как Франция и Испания), наблюдения проводятся в январе (поэтому летнее время не влияет), то спутник **взойдет в** $2^h\ 37^m$ **или** $2^h\ 51^m$ **13 января 2018 года** по гражданскому времени.

В.В.Григорьев