

XXIII Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
отборочный тур, решения

2016
3 декабря
24 января

10 класс

1. Перечислите все экваториальные созвездия для Урана, если «полярной звездой» для него является Антарес.

Решение (8 баллов):

Экваториальное созвездие — это то созвездие, по которому проходит экватор. Экватор находится в 90° от полюса Мира.

По условию полюс Мира для Урана находится рядом с Антаресом, поэтому нужно понять, как расположен круг, удаленный на 90° от него. Если взять обычную карту небесной сферы (полярную область), померить радиус окружности, очерчиваемый небесным земным экватором, и нарисовать такую же окружность с центром в Антаресе, то получится неточный уранианский небесный экватор, т.к. окружность на самом деле должна исказиться. Для понимания этого можно внимательно посмотреть на форму эклиптики на той же карте: она тоже является большим кругом небесной сферы, но на карте выглядит фигурой, лишь приближенно напоминающей окружность. Кривая, изображающая плоскость Галактики, на окружность совсем не похожа.

Склонение Антареса составляет $-26^\circ 25'$. Тогда, если переместиться на Земле в любую точку на параллели $26^\circ 25'$ ю.ш. и подождать, когда Антарес придет в зенит, то линия горизонта как раз очертит нам уранианский небесный экватор. Т.к. реально перемещаться по Земле на такие расстояния достаточно затратно, лучше воспользоваться подвижной картой звездного неба или виртуальным планетарием (например, *Stellarium*). Тогда получается следующий список созвездий (через некоторые созвездия экватор проходит дважды): Феникс, Эридан, Южная Гидра, Часы, Сетка, Золотая Рыба, Живописец, Киль, Паруса, Компас, Гидра, Секстант, Лев, Большая Медведица, Гончие Псы, Дракон, Лебедь, Лисичка, Пегас, Водолей, Скульптор.

Однако на самом деле Антарес не является точной полярной звездой для Урана. Скорее на эту роль годится звезда Сабик (η Змееносца, 2.5^m). При помощи той же программы *Stellarium* можно переместиться на Уран и уже с него посмотреть на экваториальные созвездия уранианского неба: Феникс, Тукан, Южная Гидра, Столовая Гора, Летучая Рыба, Киль, Паруса, Насос, Гидра, Чаша, Лев, Большая Медведица, Гончие Псы, Дракон, Малая Медведица, Цефей, Лебедь, Ящерица, Пегас, Рыбы, Водолей, Скульптор.

2. Оцените максимально возможную и минимально возможную видимую звездную величину отдельных галактик в скоплении галактик, находящемся на расстоянии 50 Мпк от нас.

Решение (8 баллов):

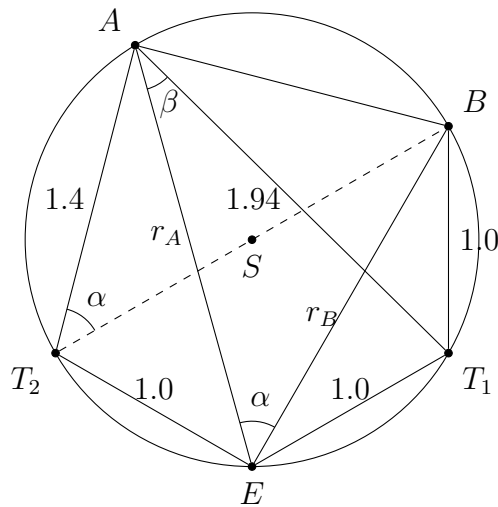
Начнем с того, что оценку звездных величин имеет смысл проводить без учета поглощения излучения в нашей собственной Галактике. В противном случае, если наблюдаемая галактика окажется в направлении, примерно совпадающем с направлением на центр нашей Галактики, ее видимая звездная величина резко возрастет (на $\gtrsim (25^m \div 30^m)$), и указание конкретной верхней оценки станет малоосмысленным. Впрочем, в реальности такие скопления галактик по этой же причине мы просто не можем наблюдать и, как следствие, ничего о них не знаем.

Воспользуемся какой-нибудь оценкой диапазона возможных абсолютных звездных величин M галактик. Поиск данных в книгах или интернете позволяет оценить диапазон, например, от -13^m до -23^m . Тогда видимая звездная величина m связана с абсолютной M и расстоянием до галактики в парсеках r соотношением $m = M + 5 \lg r - 5$. Отсюда, округляя результаты, получаем диапазон: примерно от $+10^m$ до $+21^m$.

3. Перспективный способ нахождения новых астероидов, обращающихся на одной орбите с Землей — размещение двух одинаковых телескопов в точках Лагранжа L_4 и L_5 . Предположим, что один такой телескоп обнаружил два астероида, находящихся на расстоянии 1.94 а.е. и 1 а.е. от него. Второй телескоп обнаружил только один астероид из этой пары на расстоянии 1.4 а.е. Определите угловое расстояние между астероидами, а также пространственное расстояние до каждого из них для наблюдателя с Земли.

Решение (8 баллов):

При решении ограниченной задачи трех тел (орбиты круговые, масса третьего тела пренебрежимо мала по сравнению с двумя другими) можно обнаружить, что существует пять точек, в которых третье тело способно находиться бесконечно долгое время. Первые три такие точки были обнаружены Эйлером, а четвертая и пятая — Лагранжем. Про точки L_4 и L_5 известно, что они являются вершинами равносторонних треугольников, построенных на трех телах, поэтому орбиты этих точек совпадают с орбитой второго тела. В рассматриваемой задаче главным телом является Солнце, а вторым — Земля, соответственно, телескопы расположены на орбите Земли по разные стороны от нее на расстоянии 1 а.е.



Изобразим на рисунке орбиту Земли, поместим на ней Солнце и телескопы (расстояния обозначены в астрономических единицах). Обозначим Солнце буквой S , Землю — буквой E , телескопы как T_1 и T_2 , а астероиды будем обозначать как A и B . Тогда *при помощи циркуля* можно получить по два положения для каждого из астероидов относительно T_1 . Для астероида B одна из точек попадает прямо на Землю, поэтому она исключается из рассмотрения. Становится очевидно, почему второй телескоп не смог обнаружить астероид B : он попросту скрыт Солнцем. Определим положение астероида A также *при помощи циркуля*: пересечение с засечкой от первого телескопа даст его однозначное положение. Значит нам необходимо найти угол $\angle BEA = \alpha$ и длины отрезков $EA = r_A$ и $EB = r_B$. По условию расстояние от T_1 до A равно 1.94 а.е., а от T_1 до B — 1 а.е.

Если все построения выполнены в одном масштабе и достаточно аккуратно, то на этом этапе можно взять линейку и транспортир и померить два искомых расстояния и угол. Тем не менее, приведем аналитическое решение задачи.

Искомый угол $\angle BEA = \angle AT_2B$, т.к. они опираются на одну и ту же дугу окружности. Можно заметить, что $\angle BAT_2$ — прямой, следовательно,

$$\alpha = \arccos \frac{T_2B}{T_2A} = \arccos \frac{1.4}{2} \approx 45^\circ 34'.$$

Треугольники ST_1E и ST_1B — равносторонние, следовательно, искомое расстояние r_B определяется как две высоты одного такого треугольника:

$$r_B = 2ET_1 \sin \angle ET_1S = 2 \times 1 \text{ а.е.} \times \sqrt{3}/2 \approx 1.73 \text{ а.е.}$$

Рассмотрим треугольник AET_1 . В нем угол $\angle EAT_1 = \beta = 30^\circ$, т.к. опирается на дугу в 60° . Далее можно записать для этого треугольника теорему косинусов и решить квадратное уравнение относительно r_A . Но лучше заметить, что $\angle AT_2E + \angle AT_1E = 180^\circ$, т.к. они опираются на две дуги, образующие полную окружность. Тогда $\angle AT_1E \approx 74^\circ 26'$, и можно записать теорему синусов:

$$\frac{\sin \angle EAT_1}{ET_1} = \frac{\sin \angle ATE_1}{AE} \Rightarrow r_A = AE = ET_1 \frac{\sin \angle ATE_1}{\sin \angle EAT_1} \approx 1 \text{ а.е.} \times \frac{0.96}{0.5} = 1.92 \text{ а.е.}$$

4. Возвращаясь домой, некоторый любитель астрономии сидел у окна электрички. В тот вечер невысоко над горизонтом виднелась прекрасная полная Луна. К сожалению, она была по другую сторону от поезда, однако в окне было видно ее отражение. По обе стороны от путей стояли столбы, причем в окне можно было заметить как те из них, что находились непосредственно за ним, так и отраженные с другой стороны дороги. Любитель обратил внимание на интересный эффект: между прохождениями столбов по отражению диска Луны таких, что первый вагон поезда доходит до них в один и тот же момент, проходил небольшой промежуток времени. Зная темп музыки, игравшей у него в наушниках, он определил, что величина этого интервала составляет примерно полсекунды. Считая, что разница азимутов Луны и направления движения электрички 160° , ширина электрички 3 метра, а столбы расставлены симметрично относительно путей, оцените скорость, с которой двигался поезд.

Решение (8 баллов):

Направления на Луну и на ее отражение симметричны относительно зеркала, поэтому отмеченные углы α действительно равны. На рисунке по изображению Луны проходит столб, реально находящийся за окном; через время Δt столб с другой стороны покроеет уже ее саму, и за то время электричка пройдет расстояние $v\Delta t$. Заметим, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{d} = \frac{l + v\Delta t}{d + w}$$

Значит,

$$v\Delta t = (v\Delta t + l) - l = (w + d) \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \alpha = w \operatorname{tg} \alpha$$

При этом

$$\alpha = \Delta A - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \Delta A$$

Отсюда получаем конечную формулу:

$$v = -\frac{w \operatorname{ctg} \Delta A}{\Delta t}$$

Подставив числа, получим $v \approx 60$ км/ч.

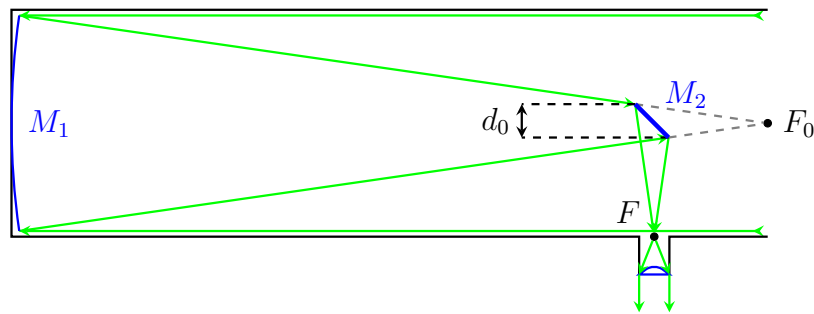
5. Вы хотите изготовить телескоп системы Ньютона с диаметром объектива 10 см и однолинзовым окуляром, обеспечивающим увеличение в 50 раз. Из соображений экономии длина трубы телескопа не может превышать 1 м. Какие зеркала и линзы Вам потребуются? Укажите их вид, размеры и фокусные расстояния.

Решение (8 баллов):

Телескоп системы Ньютона — это телескоп-рефлектор, в котором фокус главного зеркала вынесен вбок при помощи плоского зеркала.

Главное зеркало M_1 обычно параболическое, но его можно сделать и сферическим, т.к. относительное отверстие мало (это следует из тех соображений, что точность изготовления зеркала не должна быть хуже, чем доли рабочей длины волны). Оно будет круглым, его диаметр составит 10 см. Обычно в телескопах длина трубы примерно соответствует фокусному расстоянию объектива, значит фокусное расстояние главного зеркала будет около 1 м. Фокус главного зеркала отмечен как F_0 на рисунке.

Плоское эллиптическое зеркало M_2 служит для выноса фокуса главного зеркала вбок, и его размеры определяются его положением в трубе: оно не должно быть больше, чем сечение отраженных лучей, чтобы перекрывать как можно меньше попадающего во входное отверстие телескопа света. Вынесем фокус прямо «на трубу» (точка F ; хотя, строго говоря, можно выносить фокус и



за пределы трубы), поэтому расстояние от F_0 (конца трубы) до вторичного зеркала и от стенки трубы до вторичного зеркала будут совпадать. Так как диаметр трубы телескопа 10 см, то это расстояние составит 5 см. Из подобия треугольников можно понять, сечение какого диаметра d_0 это зеркало должно иметь (этот диаметр будет малой осью эллипса): $10 \text{ см}/1 \text{ м} = d_0/5 \text{ см}$, следовательно, $d_0 = 5 \text{ мм}$. Значит, большая ось эллипса зеркала будет в $\sqrt{2}$ раз больше, т.к. оно наклонено под углом 45° : $d \approx 7 \text{ мм}$. В виду малости обеих осей можно сделать круглое зеркало диаметром 7 мм.

Окуляр предполагается однолинзовый, поэтому линзу необходимо выбрать собирающую, лучше — плоско-выпуклую. Ее фокус следует совместить с главным фокусом. Так как увеличением телескопа является отношение фокусных расстояний объектива и окуляра, значит можно вычислить фокусное расстояние окуляра: $F/f = 50 \Rightarrow f = 1 \text{ м}/50 = 2 \text{ см}$.

Размер линзы окуляра подбирается из того соображения, что угловые размеры главного зеркала и окуляра при наблюдении из точки фокуса совпадали. Так что отношение размеров окуляра и его фокусного расстояния также равно $1/10$. Значит, диаметр окуляра должен быть не меньше 2 мм. Но диаметр человеческого зрачка 6 мм, да и сами окуляры обычно делают немного большего размера.

Соберем полный ответ задачи. Для построения телескопа системы Ньютона понадобятся:

- Объектив:
 - вогнутое зеркало
 - диаметром 10 см
 - с фокусным расстоянием 1 м.
- Вторичное зеркало:
 - плоское эллиптическое
 - размером 5 мм × 7 мм
- Окуляр:
 - собирающая линза
 - диаметром более 2 мм
 - с фокусным расстоянием 2 см.