XXXIII Санкт-Петербургская Астрономическая олимпиада

практический тур, решения

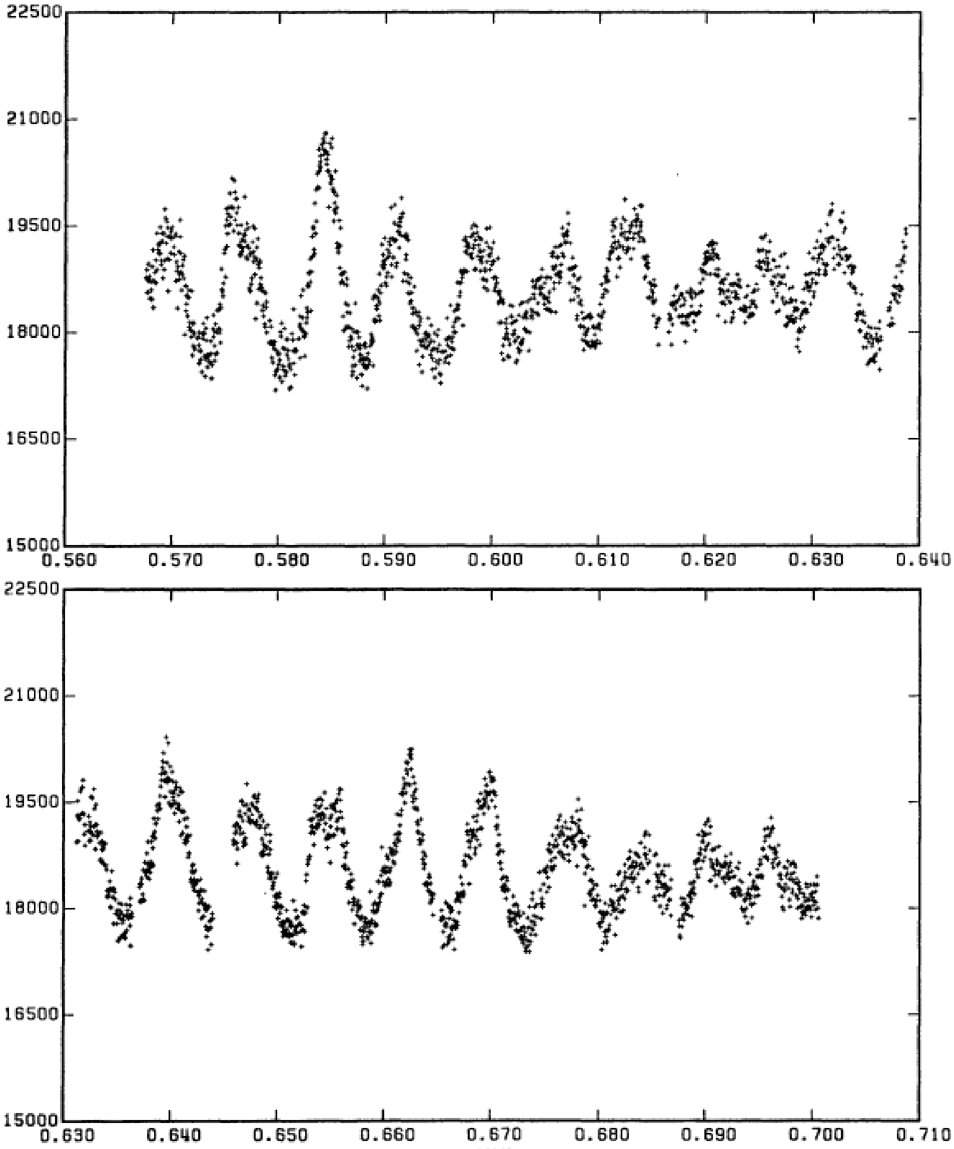
2026

15 марта

9 класс

Переменные звезды типа ZZ Кита — пульсирующие белые карлики, находящиеся в той же полосе нестабильности на диаграмме Герцшпрунга–Рассела, что и цефеиды и звезды типа RR Lyr. Однако их особенностью являются существенно иные характерные величины периодов, а также одновременное колебание с несколькими периодами.

На графике ниже представлена кривая блеска звезды ZZ Рыб — одного из представителей звезд типа ZZ Кита. Считая, что у данной звезды присутствуют одновременно два гармонических колебания с очень близкими амплитудами, определите периоды этих колебаний. По оси абсцисс отложено время в долях суток, по оси ординат — отсчеты фотонов, регистрируемых в оптическом диапазоне.



Решение:

Как, возможно, помнят некоторые участники, периоды колебаний цефеид составляют от недель до месяцев, а у звезд типа RR Lyr — один-два дня, причем величина периода определяется средней плотностью звезды — чем звезда плотнее, тем период меньше. Плотность белых карликов куда больше, чем у цефеид и звезд типа RR Lyr, значит, их периоды должны быть существенно меньше.

На графике наглядно виден сравнительно высокочастотный сигнал. Верхних пиков насчитывается 19 штук (стоит обратить внимание, что временная отметка 0.640 встречается на двух графиках, и посчитать ее только один раз), что говорит о том, что прошло 18 периодов высокочастотных колебаний. Первый пик расположен на отметке 0.570 суток, а последний — 0.697 суток. Тогда мы можем найти период высокочастотных колебаний T:

$$T = \frac{0.697 - 0.570}{18} = 0.00705 \text{ суток} = 10.2 \text{ минуты}.$$

Такой же результат получается, если подсчитывать только нижние пики. Поскольку наблюдаемый сигнал по условию представляет собой сумму двух колебаний с близкими периодами, можно предположить, что найденный нами период T является средним арифметическим между искомыми периодами T_1 и T_2,

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Низкочастотный сигнал разглядеть сложнее, однако заметно, что примерно в момент времени 0.584 амплитуда высокочастотного сигнала достигает максимума, где-то в районе 0.623 амплитуда околонулевая, затем где-то в районе 0.652 снова должен был быть максимум, но он по каким-то причинам не был достигнут (это обстоятельство мы обсудим позже), хотя до и после него явно виден синусоидальный тренд. Затем где-то в районе 0.692 достигается очередная околонулевая амплитуда. Таким образом, можно утверждать, что существует сравнительно большой период (его принято называть «периодом биений» и мы в дальнейшем будем пользоваться этим названием) $P = 0.692 - 0.623 = 0.069$ суток $= 99.4$ минуты.

Далее можно рассуждать несколькими путями.

Во-первых, можно отметить, что поскольку искомые колебания представляют собой два гармонических колебания с одинаковой амплитудой, то в тех случаях, когда суммарная амплитуда оказывается околонулевой, они при сложении взаимно «уничтожают» друг друга. Тогда количества искомых периодов T_1 и T_2, которые укладываются в период P, должны отличаться ровно на единицу: за период P одно из колебаний должно обогнать другое ровно на один период колебаний. Поэтому введем обозначение $T_1 = T + \Delta T$ и $T_2 = T - \Delta T$ и запишем изложенное выше условие в форме

$$\frac{P}{T + \Delta T} + 1 = \frac{P}{T - \Delta T}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T - \Delta T} - \frac{1}{T + \Delta T} = \frac{2\Delta T}{T^2 - (\Delta T)^2} \approx \frac{2\Delta T}{T^2},$$

поскольку по условию $\Delta T \ll T$. Осталось вычислить

$$\Delta T = \frac{T^2}{2P} \approx 0.5 \text{ минуты},$$

оправдав тем самым сделанное выше приближение, и записать ответ: $T_1 = 10.7$ минуты, $T_2 = 9.7$ минуты.

Во-вторых, можно догадаться, что период биений для двух периодических процессов очень похож на общеизвестное среди участников олимпиад по астрономии явление синодического периода. В самом деле — он тоже возникает из-за того, что какие-то два периодических процесса периодически совпадают по фазе (например, две планеты, периодически обращающиеся вокруг

Солнца, оказываются в одном и том же направлении от Солнца). А тогда мы можем сразу же записать утверждение

$$\frac{1}{P} = \left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right|,$$

последующая работа с которым идентична уже рассмотренному выше первому варианту (и приводит, естественно, к тому же ответу).

Для хорошо знающих математику можно предложить и третий путь. Распишем сумму двух (ко)синусоид с близкими циклическими частотами $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$ и $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ (где $\Delta\omega \ll \omega$), одинаковыми амплитудами A и нулевыми начальными фазами колебаний:

$$X = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) = 2A\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2} = 2A\cos(\omega t)\cos(\Delta\omega t).$$

Из этого выражения видно, что высокочастотный сигнал (с частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$) амплитудно модулируется низкочастотным сигналом с частотой $\Delta\omega = \frac{2\pi}{P}$, после чего остается только вычислить реальные периоды:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{P} = 0.0316 \text{ рад/мин}; \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0.6184 \text{ рад/мин};$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \Delta\omega} = 10.7 \text{ минуты}; \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \Delta\omega} = 9.7 \text{ минуты}.$$

Что естественно, результаты во всех трех случаях оказываются идентичными.

Отметим, что, как и было сказано в условии, переменные звезды типа ZZ Кита могут иметь одновременно несколько периодов — более двух. Данная звезда не является исключением, но другие колебания с периодами того же порядка ($\sim 10^1$ минут) имеют заметно меньшие амплитуды, из-за чего наблюдающаяся кривая блеска не является точной суммой двух гармонических сигналов.

Отдельно отметим, что график, использованный в условии задачи, был опубликован в журнале The Astrophysical Journal в 1985 году группой авторов во главе с Альбертом Холмом.

В.В.Григорьев