XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2018

4 февраля

---

9 класс

---

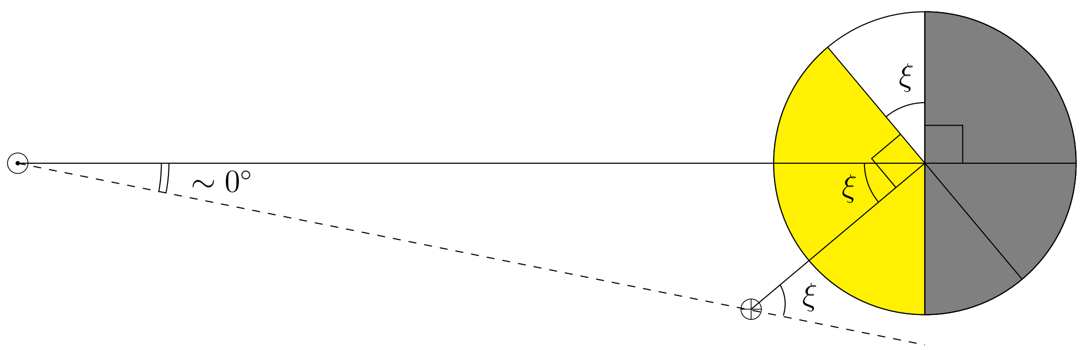
1. В некоторый день Луна, будучи в полнолунии, покрыла Альдебаран. Через месяц Луна снова покрыла Альдебаран. Какой была фаза Луны (с точностью до 1%) во время второго покрытия?

Решение:

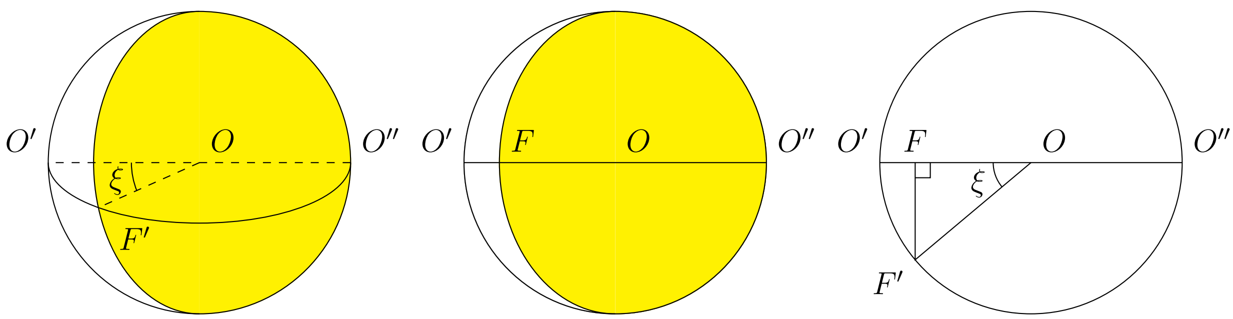
То, что по условию задачи Луна во время первого покрытия была полной, означает, что Альдебаран, Луна, Земля и Солнце находились на одной линии в указанном порядке.

В следующий раз Луна покроет Альдебаран ровно через то время, которое ей требуется, чтобы завершить оборот вокруг Земли относительно звезд. Это время равно 27.3 суток. Для того, чтобы полностью повторилась фаза Луны, необходимо чуть большее время — так называемый синодический месяц — 29.5 суток. То есть к следующему покрытию Луна «не дойдет» до фазы 100%, при которой было предыдущее покрытие, примерно 2 суток, или на угол $\xi = 2 \cdot (360°/29.5) \approx 24°$.

Нарисуем схему образования фазы Луны (Луна для наглядности сильно увеличена).



В треугольнике ⊕⊙☾ сторона ⊕⊙ примерно в 400 раз больше стороны ⊕☾, так что можно считать, что угол при ⊙ близок к нулю, а угол при ☾ равен ξ. Таким образом, угол, стягивающий сектор, закрашенный белым на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенной Солнцем и не видимой с Земли, равен ξ (см. ниже рис. а).



а б в

При проецировании изображения Луны на небесную сферу получится «серп», изображенный на рис. б, наибольшая ширина освещенной части которого $O''F$ определяется как $OO'' + OF$ (рис. в). $OO'' = OO' = OF' = R_☾$, где $R_☾$ — радиус изображения Луны на небе.

$$O''F = OO'' + OF = OO'' + OF' \cos\xi = R_☾\,(1 + \cos\xi).$$

Фаза Φ — это отношение освещенной части диаметра к полному диаметру, следовательно,

$$\Phi = \frac{R_☾\,(1 + \cos\xi)}{2R_☾} = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2\xi}}{2} \approx \frac{1 + \sqrt{1 - 0.4^2}}{2} \approx 0.95,$$

т.е. 95%.

М.В.Костина

2. В Древней Греции термином «стадий» называли расстояние, которое человек проходит за время восхода Солнца. Определим аналогичное понятие для Луны: лунным стадием назовем расстояние, которое пройдет наблюдатель в течение времени восхода Земли для этого наблюдателя. Оцените минимальную величину такого лунного стадия.

Решение:

Если не учитывать либрацию Луны, то изменение положения Земли над горизонтом Луны будет связан с изменением пункта наблюдения. Угловое расстояние, на которое требуется переместиться наблюдателю по поверхности Луны, равно угловому диаметру Земли для наблюдателя на Луне (угол между точками касания двух общих касательных для окружностей). Угловой диаметр Земли равен приблизительно

$$d = \frac{2R_\oplus}{r} = \frac{2 \cdot 6.4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^5} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 2^\circ.$$

Заметим, что тот же результат можно получить, зная, что угловой диаметр Луны для земного наблюдателя равен $\approx 0^\circ.5$, а радиус Земли примерно в 4 раза превышает лунный.

Теперь определим расстояние на поверхности Луны, соответствующее угловому расстоянию 2°: $l = d \cdot R \approx d \cdot R_\oplus/4 = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 6.4 \cdot 10^3/4 \approx 50$ км.

А.В.Веселова, И.И.Никифоров

3. Маша увидела мем в интернете: «На верхней полке ехать выгодно! За счет кривизны поверхности Земли верхняя полка описывает дугу большего радиуса, чем нижняя. Соответственно, на верхней полке за те же деньги проезжаешь чуть большее расстояние.» «А ведь и правда!» — подумала Маша и купила билет на верхнюю полку. Сколько денег сэкономит Маша на пути из Петербурга в Москву, если билет стоит 1200 рублей? Москва находится на $7^\circ.5$ восточнее и на 4° южнее Петербурга, железная дорога соединяет города по кратчайшему расстоянию.

Решение:

Расстояние вдоль параллели, редуцированное к экватору: $7.5 \cdot \cos 60^\circ \approx 4^\circ$, следовательно, расстояние по прямой (поскольку в 1° дуги меридиана около 110 км) равно $110 \cdot 4\sqrt{2} \approx 620$ км., т.е. примерно 1/10 радиуса Земли, соответствующее дуге в 1/10 радиана. Разность высот полок примем за 1 м, тогда радиус окружности r_1, описываемой нижней полкой, меньше радиуса окружности r_2, описываемого вехрней, на $\Delta r = 1$ м. Длина дуги, описываемой нижней полкой, равна $l_1 = 0.1 \cdot r_1$, а верхней — $l_2 = 0.1 \cdot r_2 = 0.1(r_1 + \Delta r)$. Таким образом, разность путей, пройденных верней и нижней полками, равна $\Delta l = 0.1 \cdot \Delta r = 0.1$ м, что составляет $0.1/(620 \cdot 10^3)$ всего пути. Умножая на стоимость проезда — 1200 рублей, получим «разность в стоимости проезда» на верхней и нижней полках: $1200 \cdot 0.1/(620 \cdot 10^3) \approx 2 \cdot 10^{-4}$ рубля или 2/100 копейки.

П.А.Тараканов, М.В.Костина

4. 12 сентября 2014 года кульминация Дубхе ($\alpha = 11^h04^m, \delta = 61°40'$) в центре Санкт-Петербурга (на широте $\varphi = 59°56'$) наблюдалась в 23^h46^m по истинному солнечному времени. В этот же момент кульминировала вторая звезда, причем сумма высот этих звезд составила 90°. Определите склонение второй звезды.

Решение:

Сначала определим, в какой кульминации — верхней или нижней — находилась Дубхе. Прямое восхождение Солнца в окрестности осеннего равноденствия составляет около 12^h. В 23^h46^m по истинному солнечному времени Солнце находится вблизи нижней кульминации. Соответственно, Дубхе, у которой примерно такое же прямое восхождение, в этот момент также оказалась в нижней кульминации. Тогда высота Дубхе составляет $h_{\text{д}} = \varphi + \delta - 90° = 31°36'$.

Высота второй звезды в кульминации составляет $h = 90° - h_{\text{д}} = 58°24'$. Пусть вторая звезда находилась в верхней кульминации, определим её склонение:

$$h = 90° - |\varphi - \delta| \Rightarrow |\varphi - \delta| = 90° - h = 31°36' \Rightarrow \delta = 28°20'.$$

Если же звезда находилась в нижней кульминации:

$$h = \varphi + \delta - 90° \Rightarrow \delta = 90° + h - \varphi = 88°28'.$$

А.В.Веселова

5. Собственное движение второй звезды в два раза меньше, чем первой, а видимая звездная величина на единицу больше. У какой звезды лучевая скорость больше, если полные скорости их равны, а также равны светимости?

Решение:

Поскольку светимости звезд равны, то разница звездных величин определяется различием в расстояниях.

$$m_2 - m_1 = 5 \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_2}{r_1} = 10^{0.2} = \sqrt{10^{0.4}} = \sqrt{2.512} \approx 1.6.$$

Тангенциальная компонента скорости пропорциональна $\mu \cdot r$, где μ — собственное движение. Равенство полных скоростей можно переписать в терминах тангенциальных и лучевых компонент скоростей:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + \mu_2^2 r_2^2.$$

Выразим второе слагаемое правой части через μ_1 и r_1:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + (0.5\mu_1)^2 (1.6 r_1)^2, \quad v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + 0.64\mu_1^2 r_1^2, \quad v_{r,1}^2 + 0.36\mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2,$$

то есть вторая звезда обладает большей лучевой скоростью.

А.В.Веселова