



11 класс

1. В повести Н. Носова «Незнайка на Луне» приключения главного героя проходили внутри полой Луны, среди коротышек, живущих на ядре внутри Луны. Представим, что в результате тотальной войны между обитателями Луны внешняя оболочка распалась на небольшие фрагменты, не связанные друг с другом. За какое время эти фрагменты упадут на ядро? Считайте, что масса Луны распределена поровну между ядром и оболочкой, масса оболочки распределена по ней равномерно, толщина оболочки и размер ядра пренебрежимо малы в сравнении с радиусом Луны.

Решение:

Движение каждого отдельного малого кусочка оболочки можно рассматривать как движение под действием ускорения, создаваемого гравитацией ядра и остальной оболочки. Выделим малый кусочек массы и найдем эти две составляющие. Пусть в некоторый момент радиус оболочки равен r . Тогда, по закону всемирного тяготения, ускорение кусочка оболочки вследствие притяжения его ядром равно $g_{\text{я}} = \frac{GM_{\text{ц}}}{2r^2}$, где $M_{\text{ц}}$ — масса Луны (по условию она разделена поровну между маленьким ядром и абсолютно тонкой оболочкой).

С оценкой ускорения, создаваемого остальной оболочкой, дело обстоит несколько сложнее. Пусть кусочек массы dm имеет площадь dS . Известно, что потенциальная энергия самогравитирующей сферы массы M и радиуса r равна $\Phi = -\frac{GM^2}{2r}$ (в нашем случае $M = M_{\text{ц}}/2$). Пусть сила гравитации, приходящаяся на единицу площади оболочки, равна p (фактически эта величина имеет смысл давления, действующего на оболочку). Мысленно изменим радиус сферы на величину dr и запишем закон сохранения энергии, чтобы найти p :

$$A = p dV = p 4\pi r^2 dr = -d\Phi = -d\left(\frac{GM^2}{2r}\right) = \frac{GM^2}{2r^2} dr.$$

Отсюда

$$p = \frac{GM^2}{2r^2 4\pi r^2},$$

а сила гравитации, действующей на кусочек массой dm и площадью dS , равна $F = p dS$. Заметив, что $\frac{M dS}{4\pi r^2} = dm$, получаем, что

$$F = p dS = \frac{GM dm}{2r^2},$$

т.е. гравитационное ускорение, которое получает оболочка при воздействии самой на себя, равно ускорению, которая получала бы частица массы dm при воздействии на ее половины массы оболочки, сосредоточенной в центре.

Тот же вывод можно получить и другим способом, несколько менее честным, но не требующим привлечения информации о потенциальной энергии самогравитирующей сферы и дифференцирования. Рассмотрим оболочку конечной (хотя и малой) толщины и разделим ее на тонкие концентрические слои. В соответствии с теоремой Ньютона самый внешний

слой притягивается остальной оболочкой так же, как материальной точкой с массой, равной массе оболочки, и расположенной в центре сферы. На самый внутренний слой — в соответствии с утверждением той же теоремы — оболочка просто не действует. Каждый же промежуточный слой притягивается только той массой оболочки, которая находится внутри него. Поскольку оболочка тонкая, то притягивающая некоторый слой масса линейно меняется с глубиной от полной массы оболочки до нуля, и в среднем произвольный малый кусочек оболочки притягивается массой, равной половине массы оболочки. Очевидно, что если устремить толщину оболочки к нулю, то полученный результат не изменится, а отсюда сразу же следует вывод, сделанный абзацем выше.

Таким образом, задача сводится к выяснению того, за какое время пробная частица, находящаяся с нулевой начальной скоростью на расстоянии, равном радиусу Луны R_{ζ} , упадет на притягивающий центр, масса которого равна $\frac{3}{4}M_{\zeta}$. Вычисляя это время t с помощью III закона Кеплера как половину периода вырожденной эллиптической орбиты с большой полуосью, равной $R_{\zeta}/2$, получаем

$$\frac{(2t)^2}{(R_{\zeta}/2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 3M_{\zeta}/4},$$

откуда

$$t = \pi \sqrt{\frac{R_{\zeta}^3}{6GM_{\zeta}}}.$$

Далее можно либо оценить радиус Луны (например, как 1/4 радиуса Земли) и массу Луны (как 1/80 массы Земли), вычислив результат непосредственно, либо предварительно преобразовать полученное выражение к виду

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{8G\rho}},$$

где $\rho = \frac{M_{\zeta}}{\frac{4}{3}\pi R_{\zeta}^3}$ — средняя плотность Луны. Последняя составляет примерно 3 г/см³, но даже достаточно грубая оценка этой величины не слишком сильно изменит результат, поскольку $t \propto \rho^{-1/2}$. В итоге получаем, что время падения составит около 20 минут.

И.Д.Маркозов, П.А.Тараканов

2. Солнечный парус, изначально покоившийся на земной орбите, вследствие солнечной вспышки приобрел скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от Солнца. Как далеко от Солнца он сможет улететь? Гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь, парус полностью отражает все падающее на него излучение.

Решение:

Сила светового давления, действующая на покоящийся парус, компенсирует его притяжение к Солнцу:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \frac{S}{c} - \frac{GM_{\odot}m}{r^2} = 0.$$

Это уравнение выполняется при любом гелиоцентрическом расстоянии паруса r . Означает ли это, что парус будет двигаться равномерно и покинет пределы Солнечной системы?

Нет! Если парус начинает двигаться, в игру вступает эффект Доплера. Рассмотрим фотон, летящий «вдогонку» парусу, движущемуся со скоростью v , и имеющий энергию E . В системе отсчета паруса его энергия меньше, чем в «солнечной»:

$$E' = E \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Хотя энергия фотона при отражении не меняется в системе отсчета паруса, в «солнечной» она составит уже

$$E'' = E' \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Таким образом,

$$E'' = E \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \approx E \left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Если бы парус покоился, при отражении этого фотона ему был бы передан импульс

$$\Delta p = \frac{2E}{c},$$

для движущегося же паруса

$$\Delta p'' = \frac{2E}{c} \left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Можем заключить, что на движущийся парус оказывается меньшая сила светового давления.

Уравнение движения паруса имеет вид

$$ma = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \frac{S}{c} \left(1 - \frac{2v}{c}\right) - \frac{G\mathcal{M}_{\odot}m}{r^2}$$

и с учетом условия равновесия для покоящегося паруса записывается как

$$ma = -\frac{2G\mathcal{M}_{\odot}m}{r^2 c} v.$$

Домножим обе части на Δt :

$$\frac{mc}{2} \Delta v = -\frac{G\mathcal{M}_{\odot}m}{r^2} \Delta r.$$

В правой части полученного соотношения стоит не что иное, как работа гравитационных сил. Мы вполне можем просуммировать ее, поскольку в результате получим просто разность гравитационных потенциальных энергий, взятую со знаком минус:

$$\frac{mc}{2} (v_1 - v_0) = \frac{G\mathcal{M}_{\odot}m}{r_1} - \frac{G\mathcal{M}_{\odot}m}{r_0}.$$

Потребуем, чтобы удалению r_1 соответствовала нулевая скорость $v_1 = 0$:

$$\frac{cv_0}{2} = G\mathcal{M}_{\odot} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = G\mathcal{M}_{\odot} \frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{r_1 - r_0}{r_1} = \frac{cv_0}{2} \left(\frac{G\mathcal{M}_{\odot}}{r_0}\right)^{-1} = \frac{cv_0}{2v_{\oplus}^2} = \frac{3 \cdot 10^8 \times 3}{2 \times (3 \cdot 10^4)^2} = \frac{1}{2};$$

$$r_1 = \frac{r_0}{1 - 1/2} = 2r_0.$$

Солнечный парус отлетит от Солнца и расположится на расстоянии 2 а. е. от него.

И.А. Утешев

3. Транснептуновый объект (174567) Варда в настоящее время имеет видимую звездную величину 21^m (при наблюдении с Земли) и находится на расстоянии 48 а.е. от Солнца. Оцените диаметр Варды, если ее поверхность отражает 10% падающего на нее света. Видимая звездная величина Солнца (также при наблюдении с Земли) составляет -27^m .

Решение:

Определим, какое количество энергии от Солнца падает на единицу площади поверхности Варды — определим освещенность Варды. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника излучения, тогда освещенность Варды $E_v = L_\odot / 4\pi r^2$. Количество энергии, получаемое Вардой за секунду времени, равно $\mathcal{E} = E_v \cdot \pi R^2$, где R — радиус Варды.

Определим освещенность, создаваемую Вардой на поверхности Земли. Поскольку нам точно не известно взаимное расположение Солнца, Земли и Варды, будем считать, что Варда удалена от Земли в среднем также на $r = 48$ а. е. Тогда освещенность, создаваемую Вардой для наблюдателя на Земле, можно оценить как

$$E = A\mathcal{E}/(2\pi r^2) = A(L_\odot/4\pi r^2) \cdot \pi R^2/(2\pi r^2) = AL_\odot R^2/8\pi r^4,$$

где $A = 0.1$. Значение радиуса можно определить, сравнив видимые звездные величины Варды и Солнца:

$$m_v - m_\odot = 2.5 \lg \frac{E_\odot}{E} = 2.5 \lg \frac{L_\odot/4\pi a_\oplus^2}{AL_\odot R^2/8\pi r^4} = 2.5 \lg \frac{2r^4}{AR^2 a_\oplus^2}.$$

Выражая результат и вычисляя его в единицах СИ, получаем

$$R = \frac{r^2 10^{0.2(m_\odot - m_v)}}{a_\oplus} \sqrt{\frac{2}{A}} = \frac{(4.8 \cdot 10 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 10^{0.2(-26.7 - 20.5)}}{1.5 \cdot 10^{11}} \sqrt{\frac{2}{0.1}} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ м} = 6 \cdot 10^2 \text{ км}.$$

А.В.Веселова

4. Определите, на какой широте можно одновременно наблюдать звезды α For ($\alpha = 3^h 12^m, \delta = -28^\circ 59'$) и ε CMa ($\alpha = 6^h 58^m, \delta = -28^\circ 58'$) на горизонте? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение:

Поскольку рефракцией можно пренебречь, то в момент появления звезд на горизонте мы можем считать высоту равной нулю. Также, поскольку значения склонений звезд очень близки, можно считать их находящимися на одной суточной параллели. Тогда для часового угла t , склонения светила δ и широты φ справедливо соотношение

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

которым можно воспользоваться как готовым фактом, а можно вывести, построив сферический треугольник с вершинами в полюсе мира, зените и светиле и записав для него теорему косинусов.

В момент нахождения звезд на горизонте они располагаются на суточной параллели симметрично относительно небесного меридиана. При этом разность часовых углов равна разности прямых восхождений: $\Delta t = t_1 - t_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, поскольку звезды наблюдаются одновременно в момент звездного времени $s = t_{1,2} + \alpha_{1,2}$.

Рассмотрим точку наблюдения в северном полушарии. Часть суточной параллели звезд с отрицательным склонением, находящаяся над горизонтом, не превосходит половины всей параллели. Поскольку звезды одновременно видны на горизонте, то длина находящейся над горизонтом части суточной параллели равна разности прямых восхождений,

а часовой угол заходящей звезды равен половине длины данного участка параллели. Тогда получим выражение для широты:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}{\operatorname{tg} \delta} = -\frac{\cos \left(\frac{1^h 53^m}{24^h} \cdot 360^\circ \right)}{\operatorname{tg} (-28^\circ 59')} \approx -\frac{\cos(30^\circ)}{-\operatorname{tg}(30^\circ)} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} = 1.5.$$

Можно вспомнить табличные значения тангенсов: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.7$. Искомая широта заключена в данном интервале. В качестве пробного значения можно рассмотреть 55° и оценить тангенс такого угла:

$$\operatorname{tg}(55^\circ) = \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 5^\circ} \approx \frac{\sqrt{3} - 5/57.3}{1 + \sqrt{3} \cdot 5/57.3} \approx 1.4.$$

У искомого угла тангенс несколько больше, поэтому для оценки можно принять значение $\varphi = 56^\circ$ или 57° . Еще один способ — вспомнить определение тангенса как отношения катетов прямоугольного треугольника, построить треугольник с нужным отношением и измерить угол в нем с помощью транспортира.

Теперь рассмотрим ситуацию для наблюдателя в южном полушарии. В данном случае над горизонтом будет находиться большая часть суточной параллели звезд. Модуль часового угла звезд будет равен дополнению полуразности прямых восхождений до 12 часов:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\cos \left(12^h - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \delta} \approx -\frac{\cos(150^\circ)}{-\operatorname{tg}(30^\circ)} \approx -1.5.$$

Поскольку тангенс является нечетной функцией, то в данном случае широта равна $-56^\circ \div -57^\circ$, и это второй возможный ответ задачи.

А.В.Веселова

5. При рентгеновских наблюдениях нейтронной звезды с массой, равной $1.4 M_\odot$, и радиусом 11 км была найдена эмиссионная линия с энергией квантов 400 кэВ. В результате какого процесса эта линия образовалась? На какой высоте над поверхностью звезды этот процесс происходил?

Решение:

Ключевым для решения задачи является ответ на первый вопрос. Нужно подобрать такой процесс, который приводил бы к излучению фотонов с практически одинаковой энергией, поскольку в противном случае линия не будет выделяться в спектре.

Переходы электронов в атомах не годятся, соответствующие энергии слишком малы. Можно было бы предположить, что речь идет о переходе в практически полностью ионизованном тяжелом атоме, однако можно либо знать, что соответствующие линии попадают максимум в мягкий рентгеновский диапазон (с энергиями на два порядка меньшими, чем требуется), либо догадаться, что характерные энергии таких переходов должны максимум на два-три порядка превышать характерные энергии обычных переходов в обычных атомах (из-за отсутствия в природе химических элементов с номерами около 100 и выше). Возможно, кто-либо из участников знает о существовании циклотронных линий в спектрах нейтронных звезд (возникающих из-за движения заряженных частиц в сильнейших магнитных полях), однако их энергии также на порядок меньше, и, главное, это линии поглощения. При ядерных реакциях образуются γ -кванты, энергия которых существенно больше.

В итоге остается один процесс, который, с одной стороны, достаточно распространен, с другой — приводит к образованию фотонов примерно нужной энергии. Это аннигиляция

электрон-позитронных пар. Однако в этом случае должна образовываться линия с энергией 511 кэВ (это энергия покоя электрона), и это означает, что излучение претерпело красное смещение $z = \frac{511-400}{511} \approx \frac{1}{5}$.

Вследствие чего оно могло появиться? Нейтронные звезды с очень большим трудом наблюдаются даже в близких галактиках, так что космологическую природу красного смещения можно исключить сразу, оно для этого чрезмерно велико. Допплеровское смещение также не подходит — при таком z объект должен двигаться относительно нас с околосветовой скоростью, а относительные скорости звезд в Галактике (и скорости галактик друг относительно друга) на порядки меньше. Остается один вариант — гравитационное красное смещение. В самом деле, если излучение образуется где-то недалеко от поверхности нейтронной звезды (что косвенно следует из самой формулировки вопроса задачи), то это означает, что свет выходит из гравитационной потенциальной ямы, созданной объектом, чей радиус лишь в несколько раз превышает радиус Шварцшильда, и гравитационное красное смещение в такой ситуации должно быть вполне заметным.

Осталось оценить величину гравитационного красного смещения, которую создает объект массы \mathcal{M} для излучения, образующегося на расстоянии r от него. Поскольку $z \approx \frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{G\mathcal{M}}{c^2 r}$ (где φ — гравитационный потенциал), из имеющихся данных можно сразу вычислить r . В результате оказывается, что $r \approx 11$ км, т.е. процесс аннигиляции происходит практически на поверхности нейтронной звезды.

П.А.Тараканов