XVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2010

12 марта

---

11 класс

---

1. Известно, что у Венеры в максимальной элонгации звездная величина $m = -4^m$. Альбедо Венеры в два раза больше, чем у Земли. Найдите звездную величину Земли, наблюдаемой с орбиты Венеры, в максимуме блеска. Радиус орбиты Венеры можно считать равным 0.7 а.е.

Решение:

Освещенность, которую создает Венера для земного наблюдателя, может быть вычислена как

$$E_{♀} = \frac{L}{4\pi R_{♀}^2} \cdot \Phi_{♀} \pi r_{♀}^2 \alpha_{♀} \cdot \frac{1}{4\pi R_{♀\oplus}^2},$$

где L — светимость Солнца, $R_{♀}$ — радиус орбиты Венеры, $\Phi_{♀}$ — наблюдаемая фаза Венеры, $r_{♀}$ — линейный радиус диска Венеры, $\alpha_{♀}$ — альбедо Венеры, $R_{♀\oplus}$ — расстояние между Землей и Венерой в момент наблюдения. Отметим, что во время максимальной элонгации Венеры Солнце, Венера и Земля образуют прямоугольный треугольник, и по теореме Пифагора $R_{♀\oplus}^2 = R_{\oplus}^2 - R_{♀}^2$. При этом земной наблюдатель видит ровно половину диска Венеры, следовательно, $\Phi_{♀} = 1/2$.

Аналогичным образом (и с использованием аналогичных обозначений) можно записать освещенность, которую создает Земля для наблюдателя, находящегося на орбите Венеры:

$$E_{\oplus} = \frac{L}{4\pi R_{\oplus}^2} \cdot \Phi_{\oplus} \pi r_{\oplus}^2 \alpha_{\oplus} \cdot \frac{1}{4\pi R'^2_{♀\oplus}},$$

При этом максимальная освещенность будет достигаться тогда, когда для венерианского наблюдателя Земля окажется в противостоянии с Солнцем. Тогда диск Земли освещен полностью и $\Phi_{\oplus} = 1$. Расстояние между Венерой и Землей в этом случае вычисляется как $R'_{♀\oplus} = R_{\oplus} - R_{♀}$ (так как Солнце, Венера и Земля лежат на одной прямой).

Отметим также, что по условию $2\alpha_{\oplus} = \alpha_{♀}$, а радиусы планет примерно равны друг другу, $r_{\oplus} \approx r_{♀}$, так как планеты похожи.

Нас интересует отношение освещенностей. Разделив одно выражение на другое, обнаруживаем, что значительная часть множителей сокращается (светимость Солнца, площади дисков планет, произведение фазы и альбедо у каждой из планет). Заметим, что при использовании понятий альбедо и фазы формально следовало бы учесть геометрию поверхности (и говорить либо о геометрическом, либо о сферическом альбедо и т.п.), однако в данном случае это излишне, поскольку достаточно лишь одинаковым образом учитывать этих факторы для обеих планет.

В итоге получаем, что

$$\frac{E_{\oplus}}{E_{♀}} = \frac{R_{♀}^2 R_{♀\oplus}^2}{R_{\oplus}^2 R'^2_{♀\oplus}}.$$

Если выразить все расстояния в астрономических единицах, получаем, что $R_{\oplus}^2 = 1^2 = 1$, $R_{♀} = 0.7^2 = 0.5$, $R_{♀\oplus}^2 = 1^2 - 0.7^2 = 0.5$, $R'^2_{♀\oplus} = (1 - 0.7)^2 = 0.1$. Подставив эти числа в общую формулу, имеем

$$\frac{E_{\oplus}}{E_{♀}} = 2.5.$$

Так как отношение освещенностей в 2.5 раза примерно соответствует разнице на 1^m (и освещенность Земли при наблюдении с орбиты Венеры больше), получаем итоговый ответ — звездная величина Земли будет примерно равна -5^m.

2. При оптических наблюдениях спектра Солнца в течение дня можно заметить, что интенсивность некоторых линий в наблюдаемом спектре меняется со временем. Опишите характер этих изменений, укажите причину этого явления.

Решение:

К изменению интенсивности линий, возникших непосредственно на Солнце, могут привести изменения химического состава или температуры вещества. Принципиально это возможно (например, изменение температуры при солнечных вспышках), однако явно маловероятно, чтобы при этом изменялась интенсивность только части линий. Следовательно, нужно найти какую-то другую причину изменения линий.

Можно предположить, что в течение дня меняется интенсивность линий, возникающих при прохождении излучения Солнца через атмосферу Земли. В таком случае причина изменения очевидна — в разное время дня излучение проходит через слой атмосферы с разной лучевой концентрацией (или попросту с разной толщиной). При этом в истинный солнечный полдень лучевая концентрация будет минимальной (а линии, соответственно, наименее интенсивными), а во время восхода и захода Солнца — максимальной (как и интенсивность линий).

3. Вычислите широту наиболее южной географической параллели на поверхности Земли, на которой максимальная высота Солнца над горизонтом достигается в мае.

Решение:

Как известно, в северном полушарии Земли (на широтах от северного тропика до северного полюса) максимальная высота Солнца достигается в полдень в день летнего солнцестояния (т.е. в июне), причем в предельном случае (на северном тропике) Солнце при этом оказывается в зените. На экваторе Земли Солнце оказывается на максимальной высоте (также в зените) во время равноденствий (т.е. в марте и в сентябре); легко заметить, что максимальная высота Солнца в мае должна достигаться на каких-то широтах, промежуточных между северным тропиком и экватором. Аналогичным образом можно показать, что в южном полушарии максимальная высота Солнца на любых широтах может достигаться в промежутке между сентябрем и мартом, т.е. заведомо не в мае.

Та же цепочка рассуждений приводит к выводу, что дата, когда Солнце окажется в зените, смещается к началу мая по мере уменьшения широты. Следовательно, на искомой географической параллели Солнце должно оказаться в зените 1 мая. Воспользуемся известным выражением, связывающим высоту светила в верхней кульминации h, склонение объекта δ и широту места наблюдения φ:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta$$

и учтем, что нас интересует верхняя кульминация в зените, т.е. $h = 90^\circ$. Отсюда получаем $\varphi = \delta$, и тем самым задача сводится к оценке склонения Солнца 1 мая.

Оценку можно провести следующим образом. Известно, что склонение Солнца меняется в течение года по синусоиде с полуамплитудой, равной углу наклона эклиптики к экватору $\varepsilon = 23^\circ.5$. Тогда зависимость склонения от номера дня в году n, отсчитанного от дня весеннего равноденствия, можно представить как

$$\delta(n) = \varepsilon \sin\left(\frac{n}{365} \cdot 360^\circ\right).$$

Между весенним равноденствием и 1 мая проходит примерно 40 суток, поэтому $\delta \approx 23^\circ.5 \cdot \sin 40^\circ$. Оценку $\sin 40^\circ$ можно выполнить несколькими различными способами.

Например

$$\sin 40^\circ = \sin(45^\circ - 5^\circ) = \sin 45^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 45^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{5}{57}\right) \approx \frac{1.4 \cdot 10}{2 \cdot 11} = \frac{7}{11} \approx 0.64,$$

и в итоге $\delta = 23^\circ.5 \cdot 0.64 \approx 15^\circ$. Это и есть ответ — параллель находится на 15° северной широты.

4. Оцените отношение силы светового давления к силе давления набегающего потока газа для первого искусственного спутника Земли. Известно, что средняя высота полета спутника составляла 600 км, а плотность атмосферы на этой высоте — 10^{-11} кг/м^3.

Решение:

Первый ИСЗ был серебристым (т.е. отражающим излучение) шаром с «усами»-антеннами. Поэтому при оценке можно считать, что и падающие на спутник фотоны, и атмосферные молекулы испытывали абсолютно упругий удар, передавая некоторый импульс спутнику. Таким образом, задача сводится к оценке отношения импульсов, передаваемых спутнику молекулами газа и фотонами за некоторое время, причем при оценке можно не учитывать особенности геометрии спутника (например, разницу между сферическим и геометрическим альбедо и т.п.), поскольку в обоих случаях они домножают силы на один и тот же коэффициент. По той же причине можно для простоты считать, что и молекулы атмосферы, и фотоны поглощаются спутником, так как поправочные коэффициенты, учитывающие «отражение», также будут одинаковыми.

Начнем с импульса, передаваемого молекулами атмосферы. Если спутник движется со скоростью v, то за некоторое время Δt он «заметет» объем, равный $V = \pi r^2 \cdot v\Delta t$ (где r — радиус спутника). В этом объеме содержится масса ρV, которая передаст спутнику импульс $\Delta p = \rho V v = \pi r^2 \rho v^2 \Delta t$. Тогда сила газового давления будет равна

$$F_{\text{газ}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \pi r^2 \rho v^2.$$

Заметим, что высота полета первого ИСЗ была существенно меньше радиуса Земли, а это означает, что скорость его движения по орбите можно считать примерно равной первой космической скорости для поверхности Земли (8 км/с).

Импульс, переданный спутнику фотонами, можно получить так. Известно, что импульс одного фотона выражается как E/c, где E — энергия фотона, c — скорость света в вакууме. Тогда световое давление можно получить как отношение освещенности, создаваемой источником излучения, к скорости света (суммарная энергия всех фотонов, испускаемых за единицу времени — это светимость объекта; разделив ее на скорость света, получаем суммарный импульс фотонов, испущенных за единицу времени, отнеся его к единичной площади, получим давление).

Тогда сила давления света выражается как

$$F_{\text{свет}} = \frac{L}{4\pi R^2 \cdot c} \cdot \pi r^2,$$

где L — светимость Солнца ($L \approx 4 \cdot 10^{26}$ Вт), R — радиус орбиты Земли.

Отношение сил газового и светового давления

$$\frac{F_{\text{газ}}}{F_{\text{свет}}} = \frac{\rho v^2}{L} \cdot 4\pi R^2\, c.$$

Подставляя численные данные, получаем окончательный ответ — отношение оказывается порядка 10^2.

5. Две компоненты двойной звезды, похожие на Солнце, вращаются друг вокруг друга по круговой орбите так, что луч зрения наблюдателя лежит в плоскости орбиты. Известно, что при спектральных наблюдениях этой двойной звезды линии водорода в ее спектре периодически раздваиваются. Оцените максимально возможное и минимально возможное значение периода орбитального вращения этой системы.

Решение:

Если бы линии в спектрах звезд были бесконечно тонкими, то при наблюдениях спектрально-двойных систем они раздваивались бы в любом случае. Однако спектральные линии имеют ширину, причем в основном из-за существования тепловых движений атомов в звездах и сдвига длин волн, на которых поглощает излучение каждый конкретный атом, за счет эффекта Допплера.

Характерная скорость движения атомов водорода может быть вычислена как

$$v_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где T — температура поверхностных слоев звезды (для Солнца это $6 \cdot 10^3$ К), R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса водорода. Получаем, что $v_{\text{тепл}} \approx 12$ км/с.

Спектральные линии при наблюдении двойной звезды раздваиваются также вследствие эффекта Допплера. При этом, если характерная скорость движения атомов будет меньше, чем орбитальная скорость звезд, входящих в двойную систему, то можно будет наблюдать две отдельных линии.

Скорость движения каждой из звезд можно получить, воспользовавшись обощенным III законом Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{2GM},$$

где a — большая полуось двойной системы (расстояние между звездами), M — масса одной звезды (по условию равная $2 \cdot 10^{30}$ кг), G — гравитационная постоянная, P — орбитальный период системы. Скорость движения выражается как

$$v = \frac{\pi a}{P} = \sqrt[3]{\frac{2GMP^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{\pi}{P} = \sqrt[3]{\frac{\pi GM}{2P}}.$$

Решая неравенство $v \geqslant v_{\text{тепл}}$ относительно периода P, получаем, что орбитальный период системы не должен превышать $1.2 \cdot 10^8$ с, т.е. примерно 4 года.

Оценка снизу получается из того же III закона Кеплера и условия, что центры компонент двойной системы не могут находиться на расстоянии, меньшем удвоенного радиуса одной звезды (радиус Солнца составляет около 700 тыс.км). Тогда большая полуось двойной системы $a = 1.4 \cdot 10^6$ км, и минимально возможный период оказывается равным $2 \cdot 10^4$ с (или примерно 6 часов).