XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2024

4 февраля

10 класс

1. Сверхновая SN 1987A достигла максимума блеска 15 мая 1987 года. Невооруженным глазом звезда перестала быть видна 4 февраля 1988 года, а в телескоп с диаметром объектива 6 см ее стало невозможно увидеть к 21 апреля 1989 года. Считая, что падение светимости сверхновой со временем происходило экспоненциально, определите видимую звездную величину SN 1987A в момент максимума.

Решение:

Диаметр зрачка примем равным $d = 6$ мм, а проницающую способность невооруженного глаза $m_0 = 6^m$. Тогда наилучшая (равнозрачковая) проницающая способность телескопа:

$$m = 6\ \ + 5\lg\frac{6\text{ см}}{6\text{ мм}} = 11^m.$$

С 4 февраля 1988 г. по 21 апреля 1989 г. прошло $366 + 24 + 31 + 21 = 442$ дня, в течение которых звездная величина сверхновой увеличилась на 5^m, а с 15 мая 1987 г. по 4 февраля 1988 г. прошло $16 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 4\ \ = 265$ дней.

Так как падение светимости сверхновой происходило экспоненциально, ее звездная величина линейно увеличивалась со временем (звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности). Поэтому за 265 дней изменение звездной величины составило

$$\frac{265}{442}\cdot 5^m = 3^m.$$

Таким образом, получаем, что в максимуме блеска видимая звездная величина сверхновой равнялась $+3^m$, что вполне соответствует реальности.

С.А.Русаков

2. Инопланетный астроном ведёт наблюдения за звездой, находящейся на расстоянии 2.2 пк от его звёздной системы. Масса звезды, вокруг которой вращается планета астронома, равна 2 массам Солнца. При этом аберрационное смещение наблюдаемой звезды постоянно по величине и ровно в пять раз меньше параллактического (также постоянного по величине). Найдите радиус орбиты планеты, на которой живет инопланетный астроном.

Решение:

Аберрационное и параллактическое смещения звезды постоянны по величине, а это значит, что звезда находится в полюсе эклиптики планеты астронома.

Параллактическое смещение звезды равно a/r, где a — радиус орбиты планеты, r — расстояние до звезды. Аберрационное смещение равно v/c, где v — орбитальная скорость планеты, c — скорость света.

По условию $5\frac{v}{c} = \frac{a}{r}$, а орбитальная скорость планеты

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}},$$

где G — гравитационная постоянная, а $M_\odot$ — масса Солнца. Тогда

$$\frac{5}{c}\sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}} = \frac{a}{r}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{25}{c^2} \cdot \frac{2GM_\odot}{a} = \frac{a^2}{r^2},$$

откуда получим

$$\frac{50GM_\odot}{c^2} = \frac{a^3}{r^2}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot GM_\odot r^2}{c^2}}.$$

Для вычислений удобно перейти в систему единиц «масса Солнца – астрономическая единица – год». В этой системе $G = 4\,\pi^2$ (что легко вычислить для системы Солнце–Земля из III закона Кеплера), $1\text{ пк} = 2\ \cdot 10^5$ а.е., а скорость света, которая примерно в 10^4 раз больше орбитальной скорости Земли, тем самым с хорошей точностью равна $2\pi \cdot 10^4$ а.е./год. Тогда

$$a = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 4\,\pi^2 \cdot 4\ \cdot 2.2^2 \cdot 10^{10}}{4\pi^2 \cdot 10^8}} \approx \sqrt[3]{97 \cdot 10^3}.$$

Кубический корень из 97 можно оценить как 4.5, поэтому получаем $a \approx 45$ а.е.

Г.И.Зайков

3. Во время выхода в открытый космос из МКС 2 ноября 2023 года астронавт Жасмин Могбели упустила сумку с инструментами. Как сообщили журналисты, период обращения сумки вокруг Земли оказался меньше орбитального периода МКС на 3 минуты. Оцените минимальную скорость, с которой Ж. Могбели должна была оттолкнуть от себя сумку, если верить журналистам.

Решение:

Поскольку орбитальный период сумки уменьшился, уменьшиться должна была и полуось ее орбиты. Воспользовавшись известным соотношением между орбитальной скоростью v, большой полуосью орбиты a и расстоянием до притягивающего центра r

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

можно сделать не менее широко известный вывод, что для получения требуемого результата орбитальную скорость сумки в точке, где она была потеряна, надо насколько возможно уменьшить. Наиболее эффективный способ сделать это — толкнуть сумку строго назад по отношению к направлению движения МКС по орбите, поэтому минимально возможная скорость будет достигаться именно в этом случае.

Сделаем еще одно допущение. Мы ничего (или почти ничего) не знаем и о массе сумки, и о массе самой Жасмин Могбели, поэтому предположим, что сумка имеет пренебрежимо малую массу по сравнению с массой астронавта (и понадеемся, что она на нас за это не обидится). В этом случае искомая относительная скорость сумки и астронавта совпадет со скоростью сумки относительно МКС. Можно также заметить, что масса астронавта, по-видимому, все же превышает массу сумки хотя бы на порядок, а тогда и результат в рамках предыдущего предположения мы получим по крайней мере с 10% точностью, что вполне устроит нас в оценочной задаче.

Далее можно действовать несколькими различными способами, продемонстрируем один, требующий сравнительно больших знаний математики, но сильно упрощающий вычисления. Найдем малое изменение орбитальной скорости на том же расстоянии r при малом изменении большой полуоси a, для чего вычислим дифференциалы левой и правой частей соотношения выше. Получим

$$2v\,dv = \frac{GM}{a^2}\,da.$$

Учтем, что МКС летает по круговой орбите, для которой $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, поэтому

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\,\frac{da}{a}.$$

Тем самым мы нашли связь между относительным изменением орбитальной скорости и относительным изменением большой полуоси.

Теперь запишем III закон Кеплера в форме

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3$$

и аналогичным образом найдем малое изменение орбитального периода P при малом изменении большой полуоси. При вычислении дифференциалов обеих частей равенства получим

$$2P\,dP = 3\ \cdot\frac{4\pi^2}{GM}\cdot a^2\,da,$$

разделив это выражение на предыдущее, найдем

$$2\,\frac{dP}{P} = 3\ \frac{da}{a}$$

и

$$\frac{da}{a} = \frac{2}{3}\,\frac{dP}{P}.$$

Заметим, кстати, что конкретные значения постоянных коэффициентов нам в итоге не понадобились — при вычислении относительных изменений они сократились.

Объединив два соотношения для относительных изменений, получаем важный промежуточный результат:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\,\frac{dP}{P}.$$

Осталось каким-либо образом оценить орбитальный период МКС P и ее орбитальную скорость v, изменения по сравнению с которыми нас интересуют. Можно вспомнить, что высота полета МКС составляет около 400 км и честно вычислить обе требуемых величины, можно сказать, что для оценки нас вполне устроят значения, соответствующие спутнику, движущемуся по поверхности Земли (а они обычно известны сразу — 84 минуты и 8 км/с). Проще всего принять в качестве оценки периода МКС $P = 90$ минутам («округлив» 84 минуты вверх и удачно попав при этом в точное значение), а орбитальную скорость принять равной 8 км/с или немного меньше (аккуратный подсчет даст 7.6 км/с и для оценки разница малосущественна). Тогда из сообщения журналистов следует, что $dP/P = 1/30$, поэтому $dv/v = 1/90$, и тем самым скорость dv, с которой нужно было толкать сумку, составляет около 90 м/с (что явно нереально, даже если Жасмин Могбели попыталась бы сделать это намеренно — мировой рекорд скорости при толкании ядра составляет около 15 м/с). Это и есть итоговый ответ задачи.

Заметим, что без дифференциалов можно было и обойтись: те же формулы позволяют на каждой стадии решения получить и абсолютные, и относительные изменения «в лоб», однако это делает решение существенно более трудоемким в вычислительном плане. Более интеллектуальный вариант — вычисление только относительных изменений с аккуратным пренебрежением малыми поправками — по сути дела будет представлять собой то же решение с дифференциалами, но без упоминания соответствующего названия.

П.А. Тараканов

4. Любитель астрономии решил сфотографировать различные объекты глубокого космоса со своего городского балкона. Для начала он сделал пробные снимки яркого объекта и снял галактику M 51 («Водоворот», видимая звездная величина $+8^m$, угловые размеры $13' \times 12'$). В результате обработки снимков выяснилось, что для того, чтобы увидеть галактику на снимке, ему необходимо было сделать и сложить 20 кадров. Какое минимальное количество кадров надо будет сделать при наблюдении водородной туманности NGC 7000 («Северная Америка», видимая звездная величина $+4^m$, угловые размеры $120' \times 100'$), чтобы увидеть ее на снимке? Оба объекта снимались в одних и тех же условиях с одинаковыми параметрами камеры и полностью помещались на снимок.

Решение:

Определим поверхностную яркость каждого из объектов, то есть звездную величину, приходящуюся на одну квадратную угловую минуту (обозначив a и b угловые размеры объекта):

$$m_{\mathrm{M\,51}} - m_1 = -2.5\lg(a_1 \cdot b_1),$$

откуда

$$m_1 = 2.5\lg(12 \cdot 13) + m_{\mathrm{M\,51}} \approx 2.5 \cdot 2.2 + 8 \ = 13^m.5.$$

Тут мы использовали следующую оценку:

$$\lg 1.2 = \frac{\ln 1.2}{\ln 10} = \frac{\ln(1+0.2)}{2.3} \approx \frac{0.2}{2.3} \approx 0.09$$

и

$$\lg 1.3 = \frac{\ln 1.3}{\ln 10} = \frac{\ln(1+0.3)}{2.3} \approx \frac{0.3}{2.3} \approx 0.13,$$

поэтому

$$\lg(12 \cdot 13) = \lg(10 \cdot 10) + \lg 1.2 + \lg 1.3 = 2 \ + 0.09 + 0.13 \approx 2.2.$$

Аналогично

$$m_{\mathrm{NGC\,7000}} - m_2 = -2.5\lg(a_2 \cdot b_2)$$

и

$$m_2 = 2.5\lg(120 \cdot 100) + m_{\mathrm{NGC\,7000}} \approx 2.5 \cdot (4 \ + 0.09) + 4 \ = 14^m.2.$$

Разница составляет $0^m.7$ на одну квадратную минуту.

Для того, чтобы увидеть туманность, надо собрать ту же самую энергию в расчете на одну квадратную минуту, поэтому число кадров для нее

$$N_{\mathrm{NGC\,7000}} = N_{\mathrm{M\,51}} \cdot 10^{0.4 \cdot 0.7} \approx N_{\mathrm{M\,51}} \cdot 100^{0.14}.$$

Вычислим $100^{0.14}$, например, так. Это с хорошей точностью $100^{1/7}$, поэтому

$$100^{1/7} = \left(128 \cdot \frac{100}{128}\right)^{1/7} = 2 \ \cdot \left(1 - \frac{28}{128}\right)^{1/7} \approx 2 \ \cdot \left(1 - \frac{28}{7 \cdot 128}\right) = 2 \ \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) \approx 1.9.$$

Итого

$$N_{\mathrm{NGC\,7000}} = 20 \cdot 10^{0.28} \approx 20 \cdot 1.9 = 38.$$

Итак, чтобы увидеть на снимке «Северную Америку», надо сделать и сложить 38 кадров.

Однако стоит отметить еще одно обстоятельство. Наблюдения проводятся в городе, а городская засветка существенно сильнее мешает наблюдать сравнительно более красные водородные туманности, чем спиральные галактики. Поэтому полученная оценка — это оценка снизу, реальное число кадров может оказаться больше.

Н.А.Ионова

5. Астрономами был открыт одиночный объект GPM J1839–10, который на протяжении трех десятков лет испускает пятиминутные узконаправленные радиосигналы с периодом 22 минуты. Оцените размеры излучающей области.

Решение:

Столь четкое сохранение периода на протяжении длительного времени говорит нам о том, что излучающая область находится на чем-то, что имеет период вращения, равный 22 минутам. Что это может быть за объект? Попробуем оценить его плотность, считая, что $T = 22$ минуты — это минимально возможный период обращения материальной точки около такого объекта (фактически — предельный период цельности тела для данного радиуса):

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4\pi^2}{\frac{4}{3}\pi G T^2} = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3\pi}{6.67\times10^{-11}\cdot(22\cdot60)^2} \approx 8\ \times 10^4\ \text{кг/м}^3.$$

Из III закона Кеплера (R — максимальный радиус тела, G — гравитационная постоянная, M — масса тела) мы смогли получить оценку снизу на плотность ρ этого объекта.

Столь высокую плотность (почти в 4 раза больше, чем плотность осмия 22.6 т/м^3) не имеет ни одно из веществ на Земле. Характерные плотности обычных звезд еще меньше. Значит, речь в задаче идет о компактном объекте: либо о белом карлике (характерная плотность 5×10^8 кг/м^3, характерный радиус 10^4 км), либо о нейтронной звезде (10^{18} кг/м^3, 10 км).

За пять минут этот объект успевает повернуться на $2\pi\cdot5/22 = 1.4$ радиана (около 80°). Отсюда характерный размер (если источник на экваторе) излучающей области будет порядка либо 14 тысяч км (в случае белого карлика), либо 14 км (в случае нейтронной звезды).

В.В.Григорьев