XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

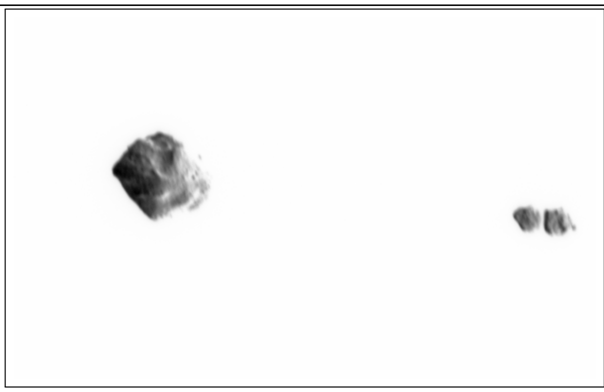
практический тур, решения

2024

3 марта

9 класс

Вам даны два изображения астероида Динкинеш и его контактно-двойного спутника Селам, полученные при их пролете АМС “Lucy”. Известно, что первая фотография была сделана, когда АМС пролетала на минимальном расстоянии (430 км) от Динкинеша, причем максимальный угловой размер Динкинеша на ней составляет $7'$. Оцените период обращения Селама вокруг Динкинеша, если известно, что они оба являются силикатными (каменными) астероидами.



Решение:

Сначала определим линейные размеры Динкинеша. Поскольку угловой диаметр астероида мал, можно считать, что его линейный диаметр D во столько же раз меньше расстояния до астероида от места съемки, во сколько раз его угловой размер меньше 1 радиана. Поэтому

$$\frac{D}{430} = \frac{7 \cdot 60}{206265},$$

откуда

$$D \approx \frac{7 \cdot 60 \cdot 430}{2 \cdot 10^5} = \frac{7 \cdot 3 \ \cdot 43}{10^3} = 0.9 \text{ км}.$$

Теперь задумаемся над тем, что мы видим на втором снимке. На нем хорошо заметно, что контактно-двойной спутник Селам состоит из двух примерно одинаковых примерно круглых половинок. В то же время на первом снимке Селам кажется более-менее округлым, второй компонент не виден, а это означает, что либо он оказался точно за Динкинешем, что маловероятно, либо закрыт первым компонентом — и мы смотрим на Селам вдоль оси, соединяющей центры двух его половинок. Второй снимок этому предположению по крайней мере не противоречит — ось действительно направлена примерно на Динкинеш. Можно также учесть, что подобная ориентация оси должна была возникнуть и из динамических соображений: существенно вытянутые спутники со временем разворачиваются большой осью на притягивающий центр вследствие приливного воздействия со стороны последнего.

Отсюда мы можем сделать важный вывод: на втором снимке луч зрения практически перпендикулярен прямой, соединяющей Динкинеш и Селам. Тогда даже без измерений можно сказать, что они расположены друг от друга на расстоянии нескольких километров, а тогда на первом снимке расстояние до Динкинеша и до видимой половинки Селама от точки съемки практически не отличаются.

Это позволяет нам определить диаметр половинки Селама. Для этого измерим наибольший диаметр Динкинеша на первом снимке. Для удобства на расположенное в конце решения изображение наложена сетка с размером ячейки 1 см, наибольший диаметр отмечен красной линией и составляет 76 мм. На нем же можно измерить диаметр Селама, он окажется чуть меньше 20 мм. Следовательно, можно считать, что половинка Селама в 4 раза меньше Динкинеша.

Качество второго изображения существенно хуже, и на нем можно измерить только расстояние между Динкинешем и Селамом, выразив его в диаметрах Динкинеша. Для удобства на изображение также нанесена сантиметровая сетка. На нем максимальный диаметр Динкинеша окажется равным 13 мм, а расстояние от его центра до центра Селама — 52 мм (удобно зафиксировать, что это расстояние в 4 раза больше диаметра Динкинеша).

Осталось сделать некоторые необходимые предположения. Поскольку астероиды одного типа, мы можем считать, что их плотность одинакова. У нас нет и не может быть никакой информации об эксцентриситете орбиты: АМС делала снимки во время пролета, двигаясь по отношению к астероидам со скоростью порядка км/с, поэтому оба снимка, очевидно, сделаны с очень небольшим интервалом по времени, за который взаимное положение астероидов не могло существенно измениться. Поэтому придется предполагать, что расстояние, видимое на втором снимке — это и есть большая полуось орбиты. Учет несферичности Динкинеша принципиально возможен, но не имеет особого смысла: мы не знаем его плотность с достаточной точностью для того, чтобы учет отклонения его формы от сферической оказался бы значимым, поэтому Динкинеш мы можем считать шаром, а Селам — двумя одинаковыми шариками (для определения его массы — при подсчете гравитационного взаимодействия Селама его можно считать материальной точкой).

Тогда, если плотность вещества астероидов ρ, масса Динкинеша имеет вид

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho = \frac{\pi D^3 \rho}{6}.$$

Масса Селама как масса двух шаров в 4 раза меньшего диаметра будет составлять

$$M_2 = 2 \ \frac{M_1}{4^3} = \frac{M_1}{32},$$

и в общем-то это означает, что и массой Селама мы можем пренебречь, соответствующая поправка находится за порогом осмысленной точности. Тогда $M_1 + M_2 \approx M_1$.

Большая полуось орбиты системы $a = 4\ D$. Осталось записать III закон Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)},$$

где P — период, G — гравитационная постоянная.

Выразим отсюда период и подставим все уже известные нам данные:

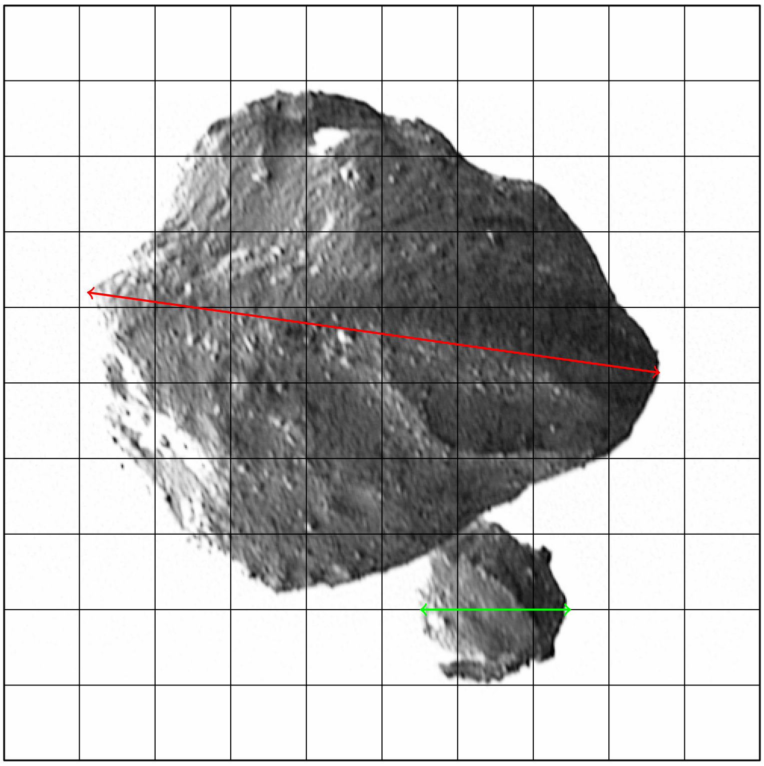
$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 64D^3}{G\pi D^3 \frac{\rho}{6}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 64 \cdot 6\ \pi}{G\rho}} = 16\sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}}.$$

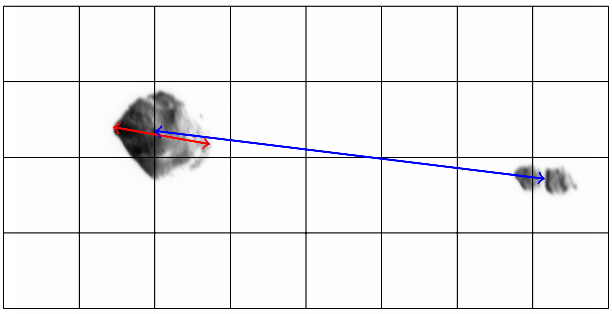
Осталось определить среднюю плотность. Они силикатные (каменные), так что для оценки можно использовать характерную плотность обычных земных камней — около $2 \cdot 10^3$ кг/м^3. Возможный диапазон плотностей достаточно велик, отклонения могут достигать 50%, а это означает, что и наша итоговая оценка будет иметь погрешность заведомо не лучше 20% (что и оправдывает неучет формы Динкинеша и т.п.).

Вычисляем период, подставляя данные в СИ и с точностью одна значащая цифра (поскольку больше незачем):

$$P = 16\sqrt{\frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 10^{-11} \cdot 2\ \cdot 10^3}} = 2\ \cdot 10^5 \text{ с.}$$

Это несколько более 2 суток, и это и есть итоговый ответ задачи. Заметим, что из имеющихся данных мы могли получить (и фактически получили) нижнюю оценку на величину большой полуоси, а это означает, что и итоговый результат — нижняя оценка возможного значения орбитального периода.





П.А.Тараканов