XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур, решения

2024

3 марта

11 класс

Вам дана видимая траектория движения объекта, наблюдаемого с Земли, на небесной сфере. Даты рядом с положениями объекта указаны либо в формате «месяц/день» (если во втором числе не более чем две цифры), либо в формате «месяц/год» (если во втором числе четыре цифры). Размер кружков пропорционален угловому размеру объекта в указанную дату. Также Вам дана карта небесной сферы (в экваториальных координатах).

Определите элементы орбиты объекта вокруг Солнца: большую полуось, эксцентриситет, наклон, долготу восходящего узла и аргумент перицентра. По этим данным найдите малую полуось орбиты, а также расстояние между объектом и Солнцем и скорость объекта в перигелии. Что еще вы можете сказать об этом объекте?

Решение:

Сначала обратим внимание, что траектория не замкнута и сходится к двум конечным точкам. Это означает, что орбита гиперболическая (формально она может быть и параболической, но в реальной жизни вероятность найти орбиту со строго фиксированным значением эксцентриситета нулевая). Это означает, что объект не должен принадлежать Солнечной системе (и уже тут можно догадаться, что это — пролетавших в окрестности Солнца внесолнечных объектов известно очень мало).

Далее можно заметить, что в течение года объект все же проходит по небу большое угловое расстояние, а это значит, что он приближается к Солнцу довольно близко. По мере того как Земля вращается вокруг Солнца, объект проецируется на разные участки неба, поэтому по мере приближения объекта к Солнцу его геоцентрическая траектория будет значительно отличаться от гелиоцентрической. Поскольку этот эффект уменьшается по мере удаления объекта от Солнца, гораздо удобнее определять параметры его орбиты, используя данные о конечных точках траектории.

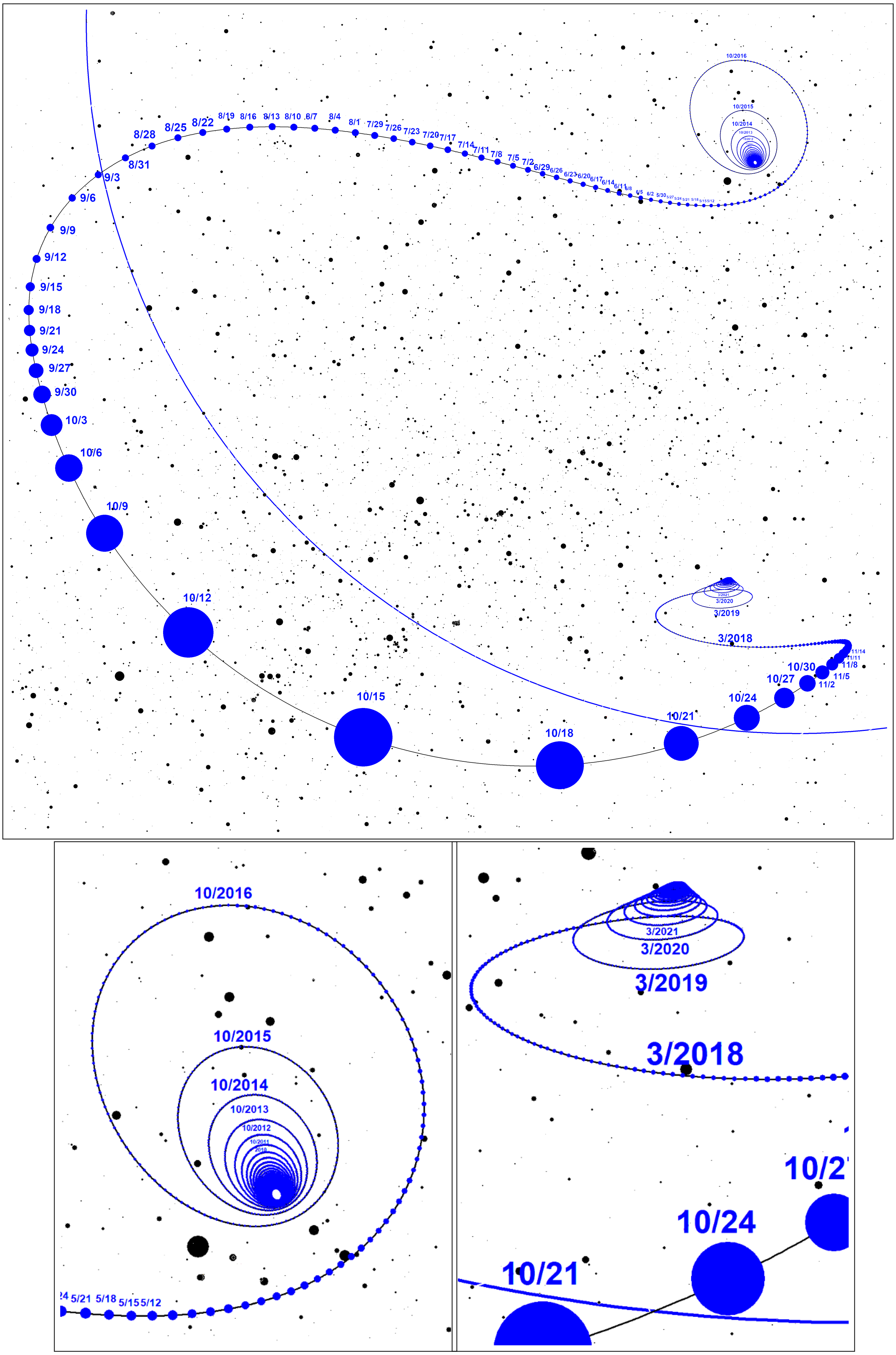
Воспользовавшись небесной картой, мы можем определить их экваториальные координаты как $\alpha_1 = 18^h.6$, $\delta_1 = +33°$, и $\alpha_2 = 23^h.9$, $\delta_2 = +25°$. Некоторые элементы орбит измерены относительно эклиптики, поэтому нам нужно будет преобразовать их в эклиптические координаты (λ, β). Нарисуем небесную сферу с экватором и эклиптикой. Затем построим соответствующий сферический треугольник, и с использованием теорем синусов и косинусов получаем

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha, \qquad \cos\lambda = \frac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\beta}.$$

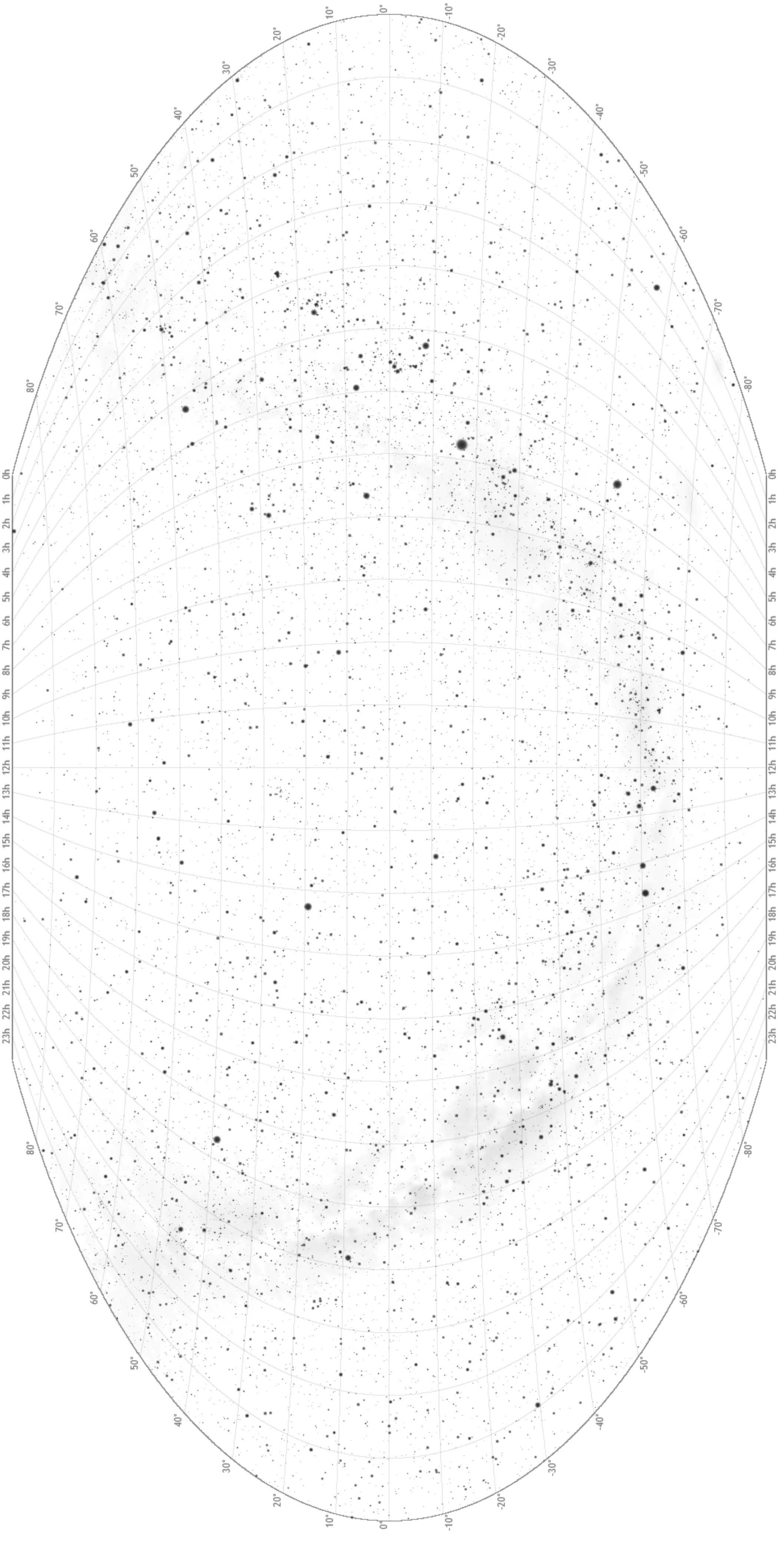
Отсюда $\lambda_1 = 284°$, $\beta_1 = +56°$, и $\lambda_2 = 9°$, $\beta_2 = +23°$. В качестве альтернативы мы могли бы заметить, что конечная точка в Лире близка к кругу склонений 18^h, а конечная точка в Пегасе — к кругу склонений 0^h и экватору. Затем, используя плоское приближение, $\lambda_1 \approx \alpha_1$, $\beta_1 \approx \delta_1 + \varepsilon$, $\lambda_2 \approx \delta_2 \sin\varepsilon$, $\beta_2 \approx \delta_2\cos\varepsilon$, можно получить аналогичные численные результаты.

Движение объекта в пространстве ограничено плоскостью, поэтому гелиоцентрическая траектория представляет собой большой круг. Теперь у нас есть координаты двух точек на этой окружности, что позволяет найти ее уравнение. Сначала определим угловое расстояние χ между конечными точками L и P. Применим теорему косинусов к треугольнику πLP,

$$\cos\chi = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\Delta\lambda \approx \sin\beta_1\sin\beta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \chi = 68°.$$



10/2016
10/2015
10/2014
10/2013
8/28
8/25
8/22
8/19
8/16
8/13
8/10
8/7
8/4
8/1
7/29
7/26
7/23
7/20
7/17
7/14
7/11
7/8
7/5
7/2
6/29
6/26
6/23
6/20
6/17
6/14
6/11
6/8
6/5
6/2
5/30
8/31
9/3
9/6
9/9
9/12
9/15
9/18
9/21
9/24
9/27
9/30
10/3
10/6
10/9
10/12
10/15
10/18
10/21
10/24
10/27
10/30
11/2
11/5
11/8
11/11
11/14
3/2021
3/2020
3/2019
3/2018
10/2016
10/2015
10/2014
10/2013
10/2012
10/2011
5/21
5/18
5/15
5/12
3/2021
3/2020
3/2019
3/2018
10/21
10/24


0h
1h
2h
3h
4h
5h
6h
7h
8h
9h
10h
11h
12h
13h
14h
15h
16h
17h
18h
19h
20h
21h
22h
23h
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
-10°
-20°
-30°
-40°
-50°
-60°
-70°
-80°

Или, упростив себе работу и несколько огрубив результат, можно воспользоваться плоским приближением:

$$\chi \approx \sqrt{\Delta\beta^2 + \left(\Delta\lambda \cos\frac{(\beta_1+\beta_2)}{2}\right)^2} = 73^\circ.$$

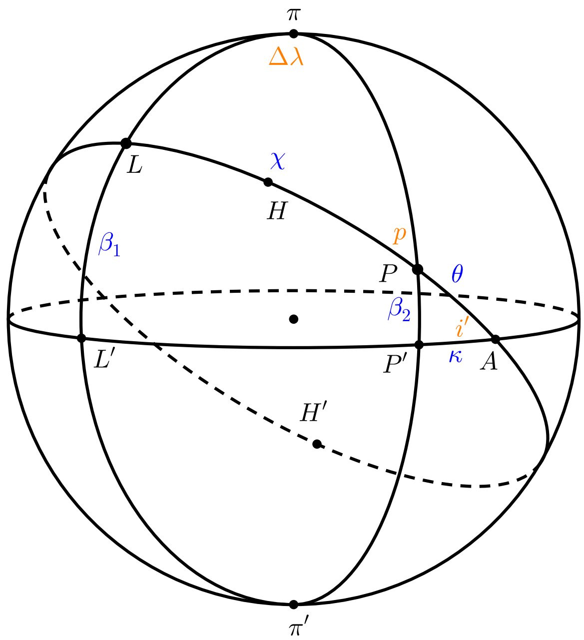
Хотя здесь лучше использовать сферическую тригонометрию.

Чтобы продолжить, найдем $p = 31^\circ$ с помощью теоремы синусов. Переключившись на маленький треугольник $PP'A$ и используя плоское приближение, мы сразу же получаем

$$\kappa \approx \beta_2 \operatorname{tg} p = 14^\circ, \gamma \approx \frac{\beta_2}{\cos p} = 27^\circ \text{ и } i' \approx 90^\circ - p = 59^\circ.$$

Как вариант, мы можем сделать это же более длинным путем. Теорема косинусов для треугольника πPA дает $\gamma = 27^\circ$. Тогда теоремы косинусов и синусов в треугольнике $PP'A$ дают $\kappa = 14^\circ$ и $i' = 61^\circ$, соответственно.

Теперь мы готовы начать делать выводы. Наш объект движется по большой окружности по длинной дуге от L до P. Это означает, что A соответствует восходящему узлу. Его долготу можно найти как $\Omega = \lambda_2 + \kappa = 24^\circ$. Теперь заметим, что эклиптическая долгота объекта по мере его движения от L к P уменьшается. Следовательно, орбитальное движение этого объекта ретроградное. Его наклон орбиты задается как $i = 180^\circ - i' = 121^\circ$. Аргумент перигелия ω — это длина дуги, начинающейся в A и идущей вдоль направления движения до точки перигелия H'. Из симметрии следует, что H' лежит точно напротив точки, расположенной посередине между P и L. Следовательно, $\omega = 180^\circ + \gamma + \frac{\chi}{2} = 241^\circ$.

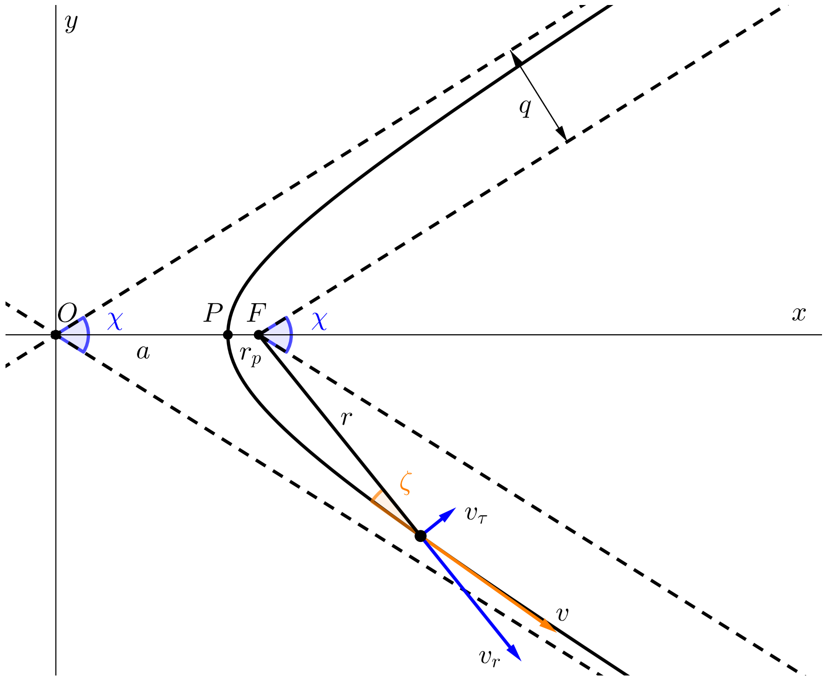


Чтобы найти оставшиеся элементы орбиты, рассмотрим геометрию гиперболической орбиты. Мы будем работать в рамках соглашения о положительной большой полуоси a. Даже если мы не знаем сразу, как геометрически интерпретировать a, b и e, это можно выяснить «на ходу». Все кеплеровы орбиты являются коническими сечениями, поэтому интуитивно понятно, что обычные полярные и декартовы уравнения эллипса распространяются на гиперболы с очень небольшими изменениями,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \qquad r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}.$$

Любые изменения в знаках можно вывести, построив рисунок.

Если мы все-таки запишем правильное декартово уравнение, то сразу заметим, что все точки ветви гиперболы удовлетворяют неравенству $x \geqslant a$, то есть a — это расстояние от центра гиперболы O до ее вершины P. Мы также видим, что при больших x и y есть предел $\frac{y}{x} \to \frac{b}{a}$,



что означает наклонную асимптоту, проходящую через центр и имеющую наклон $\frac{b}{a}$. Угол между асимптотами соответствует углу χ между конечными точками траектории, если смотреть из фокуса, так что $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \frac{b}{a}$.

В контексте полярного уравнения существование асимптот означает, что при $180° - \theta \to \frac{\chi}{2}$ мы получаем $r \to \infty$. Тогда $\cos\frac{\chi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{a}{f}$. Теперь мы можем также интерпретировать прицельный параметр q гиперболы. С одной стороны, $\sin\frac{\chi}{2} = \frac{q}{f}$. С другой,

$$\sin\frac{\chi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{f} = \frac{b}{f},$$

то есть прицельный параметр q и величина b — это одно и то же.

Возвращаясь к нашей задаче, получаем, что эксцентриситет орбиты объекта равен

$$e = \frac{1}{\cos\frac{\chi}{2}} = 1.20.$$

Чтобы найти a, рассмотрим движение объекта в одной из конечных точек (выберем P, где измерения будут проще). Траектория движения в конечных точках обусловлена суперпозицией параллакса и собственного движения. По мере удаления объекта от Солнца его скорость будет стремиться к скорости на бесконечности v_∞, а тангенциальная составляющая v_τ будет стремиться к нулю (см. рисунок выше). Поэтому гелиоцентрическая радиальная скорость v_r вдали от Солнца будет достаточно хорошей оценкой для v_∞. Чтобы найти ее, мы можем проследить гелиоцентрическое расстояние объекта со временем. Для этого мы оцениваем средний параллакс объекта по мере его удаления от года к году. Если мы сделаем это для более поздних лет, наш ответ будет более физически обоснованным, но ошибка измерений будет быстро расти. В качестве компромисса мы рассмотрим измерения только для 2021, 2022, 2023 и 2024 годов.

Используя небесную карту, найдем расстояние между Альгенибом (γ Peg) и Альферацем (α And). Оно равно 14°. Используем его в качестве масштаба на крупном плане конечной точки P. Измерим «большую ось» петли каждого года и будем считать ее удвоенным средним параллаксом этого года. В результате получим:

Год	Параллакс [°]	Расстояние [а.е.]	Увеличение расстояния [а.е.]
2021	4.94	11.6	
2022	3.24	17.7	6.1
2023	2.43	23.6	5.9
2024	1.99	28.8	5.2

Мы оцениваем $v_\infty = 5.5$ а.е./год. Мы знаем, что удельная орбитальная энергия объекта, вне зависимости от типа траектории, должна быть $\varepsilon = \frac{GM_\odot}{2a}$. Поскольку потенциальная энергия пренебрежимо мала на бесконечности, мы также можем записать $\varepsilon = \frac{v_\infty^2}{2}$, заключив отсюда, что $a = \frac{GM_\odot}{v_\infty^2}$. Для Земли мы можем записать $r_E = \frac{GM_\odot}{v_E^2}$, где $r_E = 1$ а.е. и $v_E = 2\pi$ а.е./год. Таким образом,

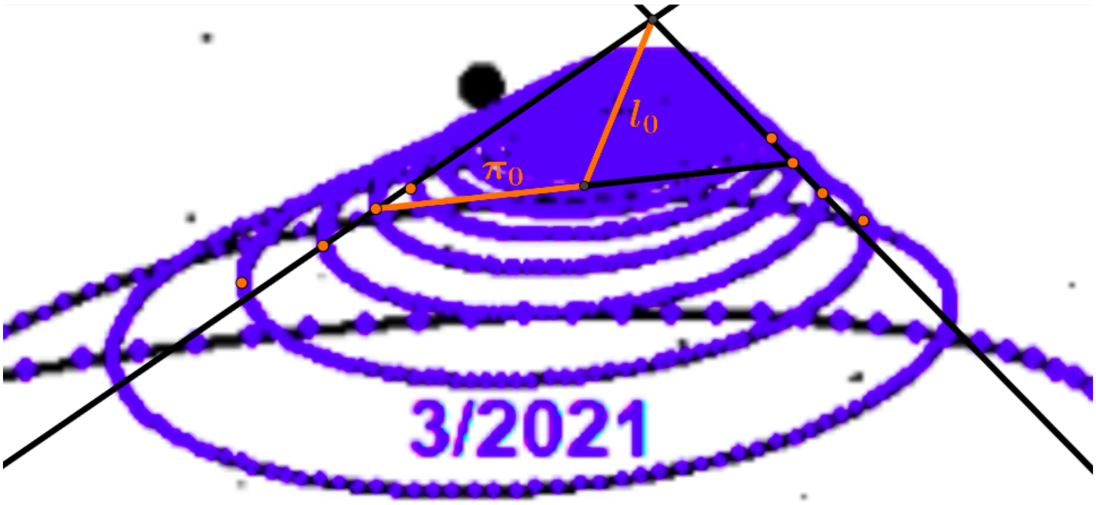
$$a = r_E \left(\frac{v_E}{v_\infty}\right)^2 = 1.30 \text{ а.е.}$$

Остальное следует из геометрии гиперболы. Получаем $b = a \operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = 0.88$ а.е. для малой полуоси и $r_p = a(e-1) = 0.26$ а.е. для перигелийного расстояния. Что касается скорости в перигелии, то проще всего воспользоваться сохранением углового момента,

$$v_p r_p = v_\infty b \qquad \Rightarrow \qquad v_p = 89 \text{ км/с.}$$

Мы также представим другой подход для нахождения физических размеров орбиты. Мы заметили, что спиральное движение объекта на больших расстояниях имеет некоторую асимптотику. В частности, движение ограничено треугольником, что означает, что отношение углового смещения и соответствующего изменения параллакса постоянно. Чтобы найти это соотношение, проведем касательные, ограничивающие спираль. Затем, используя линейность и ссылаясь на рисунок гиперболической орбиты выше, мы находим

$$\frac{\pi_0}{l_0} = \frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}\pi/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\pi/\mathrm{d}t}{\mu} = \frac{r_E}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{r_E}{r^2}\cdot v_r \cdot \frac{r}{v_\tau} = \frac{r_E}{r \operatorname{tg}\zeta} \approx \frac{r_E}{r\sin\zeta} \approx \frac{r_E}{q} = \frac{r_E}{b}.$$



Отсюда $\frac{r_E}{b} = 1.16$, что дает нам $b = 0.86$ а.е. Сразу же следует несколько других параметров: $a = 1.27$ а.е., $r_p = 0.25$ а.е. Наконец, v_∞ и v_p можно получить из уравнений сохранения энергии и углового момента,

$$v_p^2 - 2v_E^2\frac{r_E}{r_p} = v_\infty^2, \qquad v_p r_p = v_\infty b \qquad \Rightarrow \qquad v_\infty = 26 \text{ км/с}, \qquad v_p = 89 \text{ км/с.}$$

Учитывая эксцентриситет и ретроградное движение, мы пришли к выводу, что этот объект, скорее всего, имеет межзвездное происхождение. У нас недостаточно информации, чтобы комментировать состав объекта. Например, наш объект проходит довольно близко к Солнцу, но многие касающиеся Солнца кометы проходят еще ближе, не испаряясь.

На самом деле наш объект — это 1I/Оумуамуа — первое межзвездное тело, обнаруженное в Солнечной системе. Элементы его орбиты: $\Omega = 25°$, $i = 123°$, $\omega = 242°$, $e = 1.20$, $a = 1.27$ а.е.. Кроме того, $b = 0.84$ а.е., $r_p = 0.25$ а.е., $v_p = 88$ км/с.

С.Т.Иванов