



XXXI Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
отборочный тур, решения

2024
до 16
января

11 класс

1. Две черных дыры одинаковой массы слились в одну. 10% суммарной массы исходных черных дыр было потрачено на излучение гравитационных волн. Определите, во сколько раз радиус образовавшейся черной дыры больше радиуса каждой из двух исходных черных дыр.

Решение:

Масса каждой из двух черных дыр до слияния была равна \mathcal{M}_0 . Радиус каждой из двух черных дыр до слияния равнялся R_0 , и его можно вычислить как

$$R_0 = \frac{2G\mathcal{M}_0}{c^2}.$$

Впрочем, достаточно вспомнить, что радиус черной дыры пропорционален ее массе в первой степени.

Поскольку суммарная масса сливавшихся дыр равна $2\mathcal{M}_0$ и 10% ее было потрачено на излучение, то масса получившейся черной дыры $\mathcal{M} = 1.8\mathcal{M}_0$, а радиус получившейся дыры равен

$$R = \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} = \frac{2 \cdot 1.8 \cdot G\mathcal{M}_0}{c^2} = 1.8R_0.$$

Итоговый ответ: в 1.8 раз.

С.А.Русаков

2. Двойная звезда состоит из компонент, являющихся звездами Главной последовательности, массы которых равны 4 и 8 массам Солнца. Компоненты вращаются друг вокруг друга по круговым орбитам с орбитальным периодом, равным 2 годам. Угол между картинной плоскостью и плоскостью орбиты системы равен 30° . Параллакс двойной равен $0''.2$. Выберите верные утверждения.
- (a) Более массивная компонента находится в два раза ближе к барицентру системы, чем менее массивная.
 - (b) Расстояние между компонентами равно 2 а.е.
 - (c) Эксцентриситет эллипсов, описываемых на небе компонентами системы за орбитальный период, равен 0.5.
 - (d) Максимальное угловое расстояние между компонентами двойной равно $0''.72$.
 - (e) Минимальное угловое расстояние между компонентами двойной равно $0''.36$.
 - (f) Время жизни более массивной компоненты на Главной последовательности больше, чем у менее массивной компоненты.

Решение:

Правильные ответы: a,c,d.

Произведение массы компоненты на расстояние до барицентра системы — константа. Поэтому в два раза более массивная компонента будет в два раза ближе к барицентру, утверждение (a) верно.

Воспользуемся III законом Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2},$$

где T — орбитальный период в годах, a — большая полуось системы в астрономических единицах, а \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 — массы компонент в массах Солнца (4 и 8 соответственно). Отсюда вычисляем, что большая полуось (она же среднее расстояние между компонентами, она же — для системы с круговыми орбитами — постоянное расстояние между компонентами) $a \approx 3.6$ а.е., что явно не равно 2 а.е., утверждение (b) неверно.

Видимые эллиптические орбиты компонент имеют большую полуось α и малую полуось β , причем малая полуось может быть выражена через большую как $\beta = \alpha \cdot \cos 30^\circ \approx 0.87 \alpha$. Вычисляем эксцентриситет как

$$e = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \sqrt{1 - \cos^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Утверждение (c) верно.

Максимальное угловое расстояние между компонентами равно угловому размеру реальной большой полуоси орбиты, а его можно вычислить как a/r , получив ответ в радианах. Однако в силу определения парсека можно заметить, что расстояние 3.6 а.е. с расстояния в 1 пк будет видно под углом $3''.6$, а с расстояния 5 пк (поскольку двойная имеет параллакс $0''.2$, то расстояние до нее $1/0.2 = 5$ пк) — под углом в 5 раз меньшим, т.е. $3''.6/5 = 0''.72$. Утверждение (d) верно.

Мы уже знаем, что $\beta \approx 0.87 \alpha$, а это означает, что минимальное угловое расстояние существенно больше чем половина максимального. Утверждение (e) неверно.

Чем больше масса звезды, тем быстрее она эволюционирует, соответственно, дольше на Главной последовательности живут менее массивные звезды. То, что звезда двойная, ситуацию не меняет — обе звезды не успели уйти с Главной последовательности, поэтому обмен массами в системе в любом случае еще не происходил. Поэтому пункт (f) неверен.

С.А.Русаков

3. Известно, что плотность энергии магнитного поля пропорциональна квадрату его индукции. Во сколько раз полная энергия магнитного поля, заключенная в слое толщиной 1 метр у поверхности белого карлика, больше энергии в слое толщиной 1 метр у поверхности Солнца? Индукция магнитного поля Солнца составляет 10^{-4} Тл, а белого карлика — 10^2 Тл. Радиус белого карлика в 100 раз меньше радиуса Солнца. В качестве ответа укажите десятичный логарифм отношения энергий.

Решение:

Представим плотность магнитной энергии как $\varepsilon = \kappa B^2$, где κ — некоторый постоянный размерный коэффициент, а B — индукция магнитного поля. Плотность энергии — это энергия в единице объема (а ее размерность в СИ — Дж/м³), поэтому полная энергия магнитного поля в некотором объеме V равна $E = V\varepsilon$.

Слой толщиной $h = 1$ метр над поверхностью сферы радиуса R при условии $R \gg h$ (а оно выполнено и для белого карлика, и для Солнца) имеет объем $V = 4 \pi R^2 h$. Тогда отношение магнитной энергии у белого карлика (индекс WD) и Солнца (индекс \odot) записывается как

$$\frac{E_{WD}}{E_{\odot}} = \frac{V_{WD} \cdot \varepsilon_{WD}}{V_{\odot} \cdot \varepsilon_{\odot}} = \frac{R_{WD}^2}{R_{\odot}^2} \cdot \frac{B_{WD}^2}{B_{\odot}^2} = \left(\frac{1}{100} \cdot \frac{10^2 \text{ Тл}}{10^{-4} \text{ Тл}} \right)^2 = 10^8.$$

Поскольку в качестве ответа требуется указать десятичный логарифм отношения энергий, ответ должен иметь вид $\lg 10^8 = 8$.

В.В.Григорьев

4. Выберите верные утверждения о искусственных спутниках Земли.

- (a) Спутник может двигаться по устойчивой круговой орбите радиусом 1.2 млн. км относительно центра Земли.
- (b) Скорость движения спутника на круговой орбите высотой 6400 км лежит в пределах от 5.2 км/с до 5.9 км/с.
- (c) Вследствие большого количества искусственных спутников Земли ее центр масс смещен на 30 км относительно центра ядра.
- (d) Для точного определения положения наблюдателя на поверхности Земли достаточно, чтобы над горизонтом наблюдатель видел три навигационных спутника.
- (e) Существует орбита, находясь на которой спутник будет неподвижно «висеть» над одной точкой земного экватора.
- (f) Если у спутника, находящегося на низкой круговой околоземной орбите, вдвое увеличить линейную скорость движения, то спутник в некоторый момент времени удалится на расстояние более 10000 км от земной поверхности.

Решение:

Правильные ответы: b,e,f.

Радиус сферы действия Земли относительно Солнца составляет около 1 млн. км, поэтому более высокие спутники уже нельзя считать движущимися только под действием земного тяготения, утверждение (a) неверно.

Если высота орбиты равна 6400 км (т.е. равна радиусу Земли), то радиус орбиты такого спутника равен двум радиусам Земли. Поскольку круговая скорость $v \propto r^{-1/2}$, а у спутника, движущегося фактически по поверхности Земли, она равна 8 км/с, получаем, что у интересующего нас спутника она в $\sqrt{2}$ раз меньше, т.е. составляет примерно $8/\sqrt{2} = 8/1.4 \approx 5.7$ км/с. Утверждение (b) верно, тем более если мы учтем, что первая космическая скорость для Земли чуть меньше 8 км/с (7.9 км/с).

Заметим, что спутники распределены по орбитам относительно равномерно, то есть не создают скопления в некоторой точке на орбите. В таком случае значимого смещения центра масс не происходит. Более того, для смещения центра на 30 км нужно расположить на характерном для спутников расстоянии от центра Земли — допустим, 20 тыс. км (реально основная часть спутников находится ближе) — массу не менее

$$\frac{30}{20000} \cdot M_{\oplus} = \frac{30}{20000} \cdot 6 \cdot 10^{24} \sim 10^{22} \text{ кг}$$

Даже если предположить, что каждый спутник имеет массу 10 тонн, потребуется 10^{18} спутников, что точно не соответствует реальному их количеству, а это означает, что утверждение (c) неверно.

Если бы результатом наблюдений спутников были бы точные расстояния до каждого из них, то трех спутников было бы достаточно. Однако в реальности прием

сигналов от трех спутников позволяет определить только разности таких расстояний (из-за отсутствия у наблюдателя достаточно точных часов), поэтому для определения положения необходимо принимать сигнал как минимум от 4 спутников (а желательно — еще больше, чтобы минимизировать ошибки, связанные с многочисленными другими факторами, в первую очередь с изменением скорости прохождения сигнала в ионосфере Земли). Утверждение (d) неверно.

Существуют так называемые геостационарные спутники, круговая орбита которых расположена в плоскости экватора, а период обращения составляет 1 звездные сутки. Поскольку угловая скорость движения таких спутников совпадает с угловой скоростью вращения Земли, спутник постоянно находится над одной и той же точкой земной поверхности. Утверждение (e) верно.

Как известно, для одной и той же точки круговая и параболическая скорости отличаются в $\sqrt{2} \approx 1.4 < 2$ раза. Это означает, что при увеличении круговой скорости вдвое спутник перейдет на гиперболическую траекторию движения: скорость заведомо превысит параболическую (вторую космическую) скорость. Гиперболическая траектория незамкнута, постепенно спутник будет удаляться на все большее расстояние и в некоторый момент времени преодолет и указанный в условии порог. Утверждение (f) верно.

А.В.Веселова, Х.Краяни

5. Вам предлагается несколько утверждений. Для каждого из них выберите, согласны Вы с ним («да») или нет («нет»), можно также выбрать вариант «не знаю».

- (a) Звезды рождаются только в гигантских молекулярных облаках.
- (b) Среднее поглощение в диске Галактики составляет 5 звездных величин на килопарсек.
- (c) Диаметр типичной области ионизованного водорода составляет 1.3 кпк.
- (d) Звезды малых масс могут образовываться в газопылевых облаках диаметром 1 парсек.
- (e) При наблюдениях в инфракрасном диапазоне поглощение излучения пылью оказывается меньше, чем при наблюдениях в видимом и ультрафиолетовом диапазонах.
- (f) Средний радиус межзвездной пылинки равен 0.1 мм.
- (g) Среди всех молекул в межзвездной среде проще всего обнаружить при наблюдениях молекулы угарного газа.
- (h) Самыми распространенными молекулами в межзвездной среде являются молекулы углекислого газа.

Решение:

- (a) Нет. Формирование звезд возможно не только в гигантских молекулярных облаках. Так, облако с массой $10^3 M_{\odot}$ может образовывать звезды, хотя и не будет являться гигантским (к ним относят облака с массами $10^{(5 \div 6)} M_{\odot}$).
- (b) Нет. Среднее поглощение в диске составляет не более 2^m /кпк.
- (c) Нет. Области ионизованного водорода ионизируются молодыми горячими звездами. Размер получающейся области НII не превышает 10^2 пк, что меньше килопарсека.
- (d) Да. При сжатии со временем облака, формирующие звезды, фрагментируются и уменьшаются в размерах, в некоторый момент проходя стадию глобулы с диаметром около 1 пк.

- (e) Да. С ростом длины волны поглощение света уменьшается. Правда, в инфракрасном диапазоне сама пыль начинает заметно светиться — просто как всякое нагретое до температуры $\sim 10^2$ К тело.
- (f) Нет. Типичные размеры пылинок — микрометры (они же микроны).
- (g) Да. Несмотря на то, что самыми распространенными молекулами являются, что естественно, молекулы водорода (см. ниже), самым заметным является излучение молекул СО: при прочих равных «симметричные» молекулы, состоящие из одинаковых атомов, излучают намного хуже, а среди «несимметричных» молекула угарного газа оказывается одной из самых распространенных.
- (h) Нет. Основным «поставщиком» вещества в межзвездную среду являются красные гиганты, так что и химический состав межзвездной среды, в том числе и молекулярной компоненты, в первом приближении похож на химический состав атмосфер гигантов, а там атомов водорода существенно больше, чем любых других. Единственный более-менее достойный конкурент по распространенности — гелий — молекулы не образует.

А.В.Веселова, Х.Краяни, П.А.Тараканов