XVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2010

21 февраля

7–8 классы

1. В древности направление на юг определяли следующим образом: отмечали направления на точки восхода и захода Солнца в некоторый день, а затем брали среднее между этими направлениями. Укажите примерные даты, когда направление на юг таким методом определяется точнее всего. Обоснуйте свой ответ.

Решение:

На первый взгляд кажется, что интервалы времени, проходящие от восхода Солнца до полудня и от полудня до захода, одинаковы (и тогда точность метода всегда одинакова). Однако на самом деле это не так. В течение года продолжительность дня меняется, и вторая половина дня всегда немного короче или немного длинее, чем первая. Следовательно, нужно подобрать даты, в окрестности которых продолжительность светового дня остается практически неизменной. Это произойдет, когда световой день будет самым длинным или, наоборот, самым коротким, т.е. в дни летнего и зимнего солнцестояний. Следовательно, ответ — либо 21–22 июня, либо 21–22 декабря.

2. Линейный размер звездного скопления равен 10^{14} км. Средняя плотность вещества скопления $6 \cdot 10^{-22}$ г/см^3. Оцените количество звезд в скоплении, если известно, что оно состоит из солнцеподобных звезд (средняя плотность звезды $\rho \approx 1.4$ г/см^3, радиус звезды $R \approx 7 \cdot 10^5$ км).

Решение:

Проще всего решить задачу, используя понятие массы. Если число звезд в скоплении N, то масса скопления $M_{\text{ск}} = N \cdot m_{\text{зв}}$, где $m_{\text{зв}}$ — масса одной звезды. Масса $M = V \cdot \rho$, где V — объем, а ρ — плотность. Тогда

$$N = \frac{M_{\text{ск}}}{m_{\text{зв}}} = \frac{V_{\text{ск}}\rho_{\text{ск}}}{V_{\text{зв}}\rho_{\text{зв}}}$$

Скопление с достаточной точностью можно считать шарообразным, тогда $\frac{V_{\text{ск}}}{V_{\text{зв}}} = \frac{R^3_{\text{ск}}}{R^3_{\text{зв}}}$, где Rск — радиус скопления (равный половине линейного размера, данного в условии), а Rзв — радиус звезды. Отсюда

$$N = \frac{\rho_{\text{ск}}}{\rho_{\text{зв}}} \cdot \left(\frac{R_{\text{ск}}}{R_{\text{зв}}}\right)^3 = \frac{6 \cdot 10^{-22}}{1.4} \cdot \left(\frac{0.5 \cdot 10^{14}}{7 \cdot 10^5}\right)^3 \approx 160,$$

т.е. в скоплении около 160 звезд.

3. Различаются ли продолжительности покрытий некоторой далекой звезды Солнцем и Луной и на сколько? Угловые диаметры Солнца и Луны можно считать одинаковыми и равными $30'$.

Решение:

Покрытия происходят, когда Луна или Солнце в своем движении среди звезд закрывают какую-либо звезду от наблюдателя. Движение Луны среди звезд является отражением ее движения по орбите вокруг Земли, а Солнца — отражением движения Земли по орбите вокруг него. Эти два движения происходят с разными угловыми скоростями (угловая скорость — скорость изменения направления на объект), т.е. за одинаковый промежуток времени. Луна совершает полный оборот по небу (360°) чуть меньше, чем за месяц (точнее, за 27.3 суток), а Солнце — за год (примерно за 365.3 суток). Угловая скорость Луны равна

$$\frac{360}{27.3} \approx 13^\circ/\text{сутки},$$

а Солнца —

$$\frac{360}{365.3} \approx 1^\circ/\text{сутки}.$$

Значит, угловая скорость Луны примерно в 13 раз больше угловой скорости Солнца, т.е. покрытие звезды Солнцем будет продолжаться дольше, чем покрытие звезды Луной.

В течение покрытия — от захода звезды за один край и выхода из-за другого — Луне, или Солнцу, нужно сместиться по небу на угол, равный их угловому диаметру $0^\circ.5$ (конечно, если покрытие центральное, т.е. звезда проходит через центр диска Луны или Солнца). Таким образом покрытие звезды Солнцем будет продолжаться около половины суток, в Луной — около 1/26 части суток. Следовательно, продолжительность покрытия будет различаться на 6/13 суток, или, примерно на 11 часов.

4. Самолет вылетел из Москвы 24 октября 2009 года в 21 час 5 минут и приземлился в Шанхае в 10 часов 55 минут. Тот же самолет вылетел в обратный рейс из Шанхая 25 октября 2009 года в 12 часов 45 минут, а приземлился в Москве в 17 часов 35 минут. В каком часовом поясе находится Шанхай? Все даты и моменты указаны по местному времени.

Решение:

Так как все моменты даны по местному времени, то кажущаяся разница во времени полета самолета туда и обратно связана с разницей часовых поясов Москвы и Шанхая. Пусть T — реальное время полета самолета в один конец, а τ — разность поясного времени в Шанхае и Москве. Тогда, поскольку время Шанхая должно опережать московское (так как Шанхай существенно восточнее Москвы), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} T + \tau = 10^h55^m - 21^h05^m + 24^h00^m = 13^h50^m \\ T - \tau = 17^h35^m - 12^h45^m = 4^h50^m \end{cases}$$

Время записано в принятом в астрономии формате «часы^{h}минуты^m», добавка 24 часов в первом уравнении связана с тем, что самолет, вылетевший из Москвы 24 октября, приземлился в Шанхае уже 25 октября.

Решая эту систему, получаем нелепый на первый взгляд ответ: оказывается, что разница во времени Шанхая и Москвы равна $\tau = 4^h30^m$ (время полета самолета $T = 9^h20^m$). Как же так — ведь время в соседних часовых поясах отличается на один час и, следовательно, шанхайское и московское время должны отличаться на целое число часов?

Объяснение этой нелепицы заключено в датах полета самолета. Несложно выяснить, что 25 октября 2009 года было последним воскресеньем октября, а в этот день в России в 3 часа ночи время меняется с летнего на зимнее и все часы переводятся на час назад. Таким образом, время отлета самолета из Москвы указано по летнему времени, а время посадки в Москве — уже по зимнему.

Теперь все встало на свои места. При полете из Москвы в Шанхай время в Шанхае и в Москве отличалось на 4 часа, при возвращении — на 5 часов. Вспомнив, что, например, зимнее московское время соответствует 3-му часовому поясу, получаем, что Шанхай находится в 8-м часовом поясе.

5. Телескоп, наблюдающий Солнце, снабжен механизмом, который обеспечивает слежение телескопа за Солнцем (вращение телескопа с той же угловой скоростью, с которой Солнце движется по небу). Телескоп может вращаться также в обратном направлении с той же угловой скоростью. Какое минимальное время может понадобиться для перевода телескопа с западного края диска Солнца на восточный? С восточного на западный?

Решение:

Сначала выясним, с какой угловой скоростью может вращаться телескоп. Так как Солнце проходит 360° за 24 часа, то можно легко получить, что на 1° телескоп поворачивается за 4 минуты. Заметим, что Солнце во время перевода телескопа также движется по небу с такой же угловой скоростью.

Если телескоп переводится с западного края диска Солнца на восточный, то он движется навстречу Солнцу и скорости движения Солнца и телескопа складываются, т.е. Солнце и телескоп движутся навстречу друг другу со скоростью 1° за 2 минуты. Так как угловой диаметр диска Солнца примерно равен $30'$ (что дано в условии задачи №3), т.е. $0^\circ.5$, то перевод в этом случае займет одну минуту.

В случае перевода телескопа с восточного края диска на западный все сложнее. Телескоп движется с той же скоростью, что и Солнце, поэтому догнать западный край диска, вращаясь в ту же сторону, он не сможет никогда.

Остается другая возможность — телескоп должен вращаться в обратном направлении. Тогда Солнце и телескоп опять будут двигаться навстречу друг другу, однако начальное угловое расстояние между западным краем диска Солнца и телескопом будет составлять чуть менее 360°. Солнце или телескоп в отдельности проходят это расстояние за 24 часа, но относительная скорость, как и в первой части задачи, будет в два раза больше, поэтому на такой перевод будет потрачено в два раза меньше времени, т.е. 12 часов.