XXIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2022

6 февраля

---

10 класс

---

1. В некотором российском селе полярная ночь длится 60 дней. Определите склонение наблюдающейся в этом селе звезды, если известно, что при наблюдении в верхней кульминации звезда над горизонтом находится вдвое выше, чем в нижней кульминации.

Решение:

Зная длительность полярной ночи, определим широту места наблюдения. Зависимость склонения Солнца от даты представим косинусоидой с началом отсчета в дне зимнего солнцестояния, тогда склонение спустя N дней от дня зимнего солнцестояния будет равно

$$\delta(N) = -23^\circ 26' \cos\left(\frac{N}{365}\cdot 360^\circ\right).$$

Завершится полярная ночь спустя 30 дней после дня зимнего солнцестояния при склонении Солнца

$$\delta(30) = -23^\circ 26' \cos\left(\frac{30}{365}\cdot 360^\circ\right) \approx -23^\circ 26' \cos\left(30^\circ\right) = -20.4^\circ.$$

С учетом рефракции ($35'$) и видимого углового радиуса Солнца ($16'$) полярная ночь заканчивается при истинной высоте центра Солнца в верхней кульминации $-35' - 16' = -51' = 90^\circ - \varphi + \delta$. Отсюда широта оказывается равной 70.5°.

Теперь определим склонение звезды, расписав соотношения для высоты в кульминациях. Сначала разберем ситуацию, в которой верхняя кульминация происходит к югу от зенита:

$$90^\circ - \varphi + \delta = 2\cdot(\varphi + \delta - 90^\circ) \quad\Rightarrow\quad \delta = 270^\circ - 3\varphi = 58.5^\circ.$$

Проверим, разумной ли получается высота верхней кульминации: $90^\circ - 70.5^\circ + 58.5^\circ = 78^\circ$.

Если же верхняя кульминация происходит к северу от зенита:

$$90^\circ + \varphi - \delta = 2\cdot(\varphi + \delta - 90^\circ) \quad\Rightarrow\quad 3\delta = 270^\circ - \varphi, \quad \delta = 66.5^\circ.$$

Но в этом случае высота верхней кульминации будет равна $90^\circ + 70.5^\circ - 66.5^\circ = 94^\circ > 90^\circ$, что невозможно.

А.В.Веселова

2. Для ретрансляционных спутников существует такое явление, как «засветка» антенн земных станций Солнцем — зашумление радиосигнала, принимаемого со спутника, в результате смешения полезного радиосигнала с излучением от Солнца, при нахождении Солнца на небе рядом со спутником. Определите примерные диапазоны дат, когда возникает засветка, если известно, что наземная станция принимает сигнал со спутника на частоте 12 ГГц и представляет собой неподвижную параболическую антенну с диаметром 2 м.

Решение:

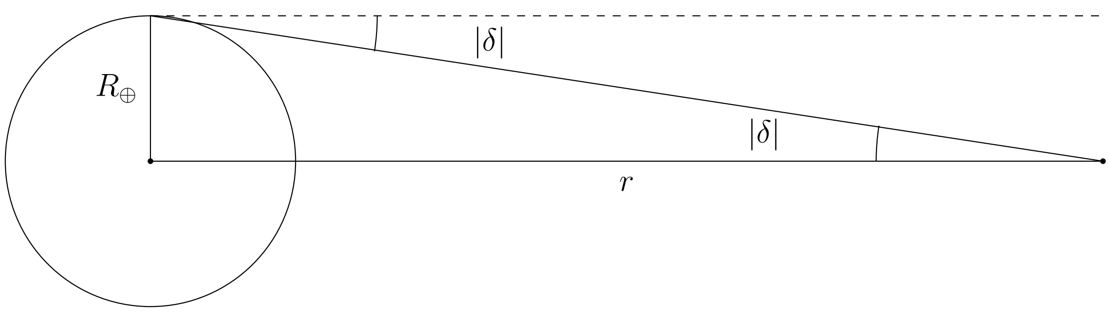
Оценим угловое разрешение β антенны с диаметром D, наблюдающей на частоте ν (и длине волны λ):

$$\beta \approx 1.2\frac{\lambda}{D} = \frac{c}{\nu\, D} = 1.2\frac{3\cdot 10^8}{12\cdot 10^9\times 2} \approx \frac{1}{67} \approx 1^\circ,$$

причем мы чуть завысили результат. Угловые размеры Солнца на небе около $0^\circ.5$ (причем это в оптическом диапазоне, а «Радиосолнце» немного больше), так что примем для оценки, что для появления засветки Солнце должно оказаться на расстоянии не более 1° от направления наблюдения антенны.

Поскольку антенна неподвижна, то работать она может только с геостационарными спутниками, а они вращаются вокруг Земли в плоскости экватора. Поэтому нам требуется найти интервал времени, когда Солнце находится на расстоянии $\pm 1^\circ$ от небесного экватора. Для этого можно воспользоваться методом из предыдущей задачи, но можно использовать и более простую оценку: эклиптика наклонена к экватору под углом $\varepsilon = 23^\circ.4$, поэтому между равноденствием и достижением склонения 1° Солнце должно пройти по эклиптике расстояние $1^\circ/\sin 23^\circ.4 = 1^\circ/0.4 = 2^\circ.5$. Считая, что Солнце проходит примерно 1° в сутки, получаем, что полный интервал движения Солнца в полосе склонений от -1° до $+1^\circ$ составляет около 5 суток. Соответственно, засветка возникает в окрестности равноденствий и продолжается около 5 суток два раза в год.

Однако мы не учли еще один существенный фактор. Геостационарные спутники находятся не на бесконечно большом расстоянии от Земли, поэтому их склонение только при наблюдении с экватора будет нулевым (и оценка выше годится именно для этого случая). Рассмотрим предельный случай: что будет, если мы окажемся на одном из географических полюсов Земли (для определенности — на северном):



В таком случае наблюдаемое склонение геостационарного спутника можно будет определить из условия $\operatorname{tg}|\delta| = \frac{R_\oplus}{r}$, где $r \approx 42$ тыс. км — радиус орбиты геостационарного спутника (соответствующую величину, если она неизвестна, легко вычислить). Получаем, что $\delta \approx -9^\circ$ (в южном полушарии склонение, наоборот, будет положительным). Для промежуточных между экватором и полюсом точек Земли склонение, очевидно, будет меняться в пределах от нуля до максимального по модулю значения.

Тогда, вспомнив синусоидальный характер зависимости склонения Солнца от даты (и его амплитуду), можно сделать вывод, что продолжительность двух интервалов засветки с разумной точностью можно считать постоянной, но вот даты двух периодов засветки при отходе от экватора будут примерно равномерно сближаться (в сторону, соответствующую зиме в каждом из полушарий Земли). Мы выше фактически уже выяснили, что в окрестности равноденствий склонение Солнца меняется со скоростью $0^\circ.4$ в сутки, поэтому максимально возможное отклонение средней даты периода засветки от дат равноденствий будет составлять около 3 недель.

М.В.Костина, П.А.Тараканов

3. Вокруг звезды с массой 2 массы Солнца по круговым орбитам в одной плоскости и в одном направлении обращаются две планеты. Радиусы орбит равны 0.5 а.е. и 0.8 а.е., экваторы планет лежат также в этой плоскости. Известно, что продолжительность местных «солнечных» суток на планетах совпадает, но при этом внешняя планета совершает оборот вокруг своей оси вдвое дольше, чем внутренняя. Определите периоды осевого вращения планет, считая их длительность меньше длительности орбитальных периодов для каждой планеты.

Решение:

Основная сложность задачи состоит в том, что мы не знаем, сонаправлено ли осевое и орбитальное вращение: возможен случай типа Венеры. Поэтому необходимо рассмотреть все возможные случаи, которых насчитывается четыре:

(a) у обеих планет орбитальное и осевое вращения сонаправлены;

(b) у обеих планет орбитальное и осевое вращения противонаправлены;

(c) у внутренней планеты орбитальное и осевое вращения сонаправлены, у внешней противонаправлены;

(d) у внутренней планеты орбитальное и осевое вращения противонаправлены, у внешней сонаправлены.

Разберем ситуации последовательно. Во всех ситуациях T_1 — орбитальный период внутренней планеты, T_2 — орбитальный период внешней планеты, P и $2P$ — периоды осевого вращения, S — продолжительность местных «солнечных» суток. Периоды обращения планет определим из III закона Кеплера в системе единиц «год–а.е.–масса Солнца»:

$$\frac{T_{1,2}^2}{a_{1,2}^3} = \frac{1}{M}\,.$$

Отсюда $T_1 = \sqrt{a_1^3/M} = 0.25$ года, $T_2 = \sqrt{a_2^3/M} \approx 0.5$ года.

(a) При сонаправленном вращении при определении солнечных суток угловые скорости орбитального и осевого вращения будут вычитаться (фактически, мы определяем синодический период), при этом по условию период осевого вращения меньше орбитального периода:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T_1}\,, \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{2P} - \frac{1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1 - P}{T_1 P} = \frac{T_2 - 2P}{T_2 \cdot 2P}\,.$$

Решаем последнее равенство как уравнение на P:

$$P = \frac{T_1 T_2}{2(T_2 - T_1)} = 0.25\,\text{г.}$$

Но если мы теперь попробуем оценить продолжительность «солнечных» суток, у нас получится с той или иной степенью точности ответ, заметно превышающий длительность года на планете!

(b) В случае противоположности направлений осевого и орбитального вращения угловые скорости складываются:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} + \frac{1}{T_1}\,, \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{2P} + \frac{1}{T_2} \;\Rightarrow\; \frac{T_1 + P}{T_1 P} = \frac{T_2 + 2P}{T_2 \cdot 2P}\,.$$

Решаем последнее равенство как уравнение на P:

$$P = \frac{T_1 T_2}{2(T_1 - T_2)} < 0.$$

Таким образом, рассмотренная ситуация невозможна.

(c) Пусть у внутренней планеты орбитальное и осевое вращения сонаправлены, у внешней противонаправлены:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T_1}\,, \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{2P} + \frac{1}{T_2} \;\Rightarrow\; \frac{T_1 - P}{T_1 P} = \frac{T_2 + 2P}{T_2 \cdot 2P}\,.$$

Решаем последнее равенство как уравнение на P:

$$P = \frac{T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)} = 0.083\,\text{г}.$$

При этом продолжительность «солнечных» суток получается около 0.125 года.

(d) Пусть у внешней планеты орбитальное и осевое вращения сонаправлены, у внутренней противонаправлены:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} + \frac{1}{T_1}\,, \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{2P} - \frac{1}{T_2} \;\Rightarrow\; \frac{T_1 + P}{T_1 P} = \frac{T_2 - 2P}{T_2 \cdot 2P}\,.$$

Решаем последнее равенство как уравнение на P:

$$P = -\frac{T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)} < 0.$$

Таким образом, рассмотренная ситуация невозможна.

А.В.Веселова

4. Переменные звезды типа W UMa представляют собой две одинаковых звезды Главной последовательности, соприкасающихся поверхностями. Оцените характерный орбитальный период такой пары для звезд типа Солнца. Что можно сказать о периоде, если обе звезды имеют спектральный класс F? спектральный класс K?

Решение:

В первом приближении будем считать звезды сферически-симметричными. Тогда в случае соприкосновения их поверхностей расстояние между их центрами равно двум радиусам. Оценим величину периода обращения системы P_0 из двух звезд типа Солнца при помощи третьего закона Кеплера:

$$P_0^2 = \frac{4\pi^2 (2R_\odot)^3}{2GM_\odot} = 0.01^3/2 \qquad \Rightarrow \qquad P_0 = 0.1^3/1.41 \text{ года} = 7\times10^{-4} \text{ года} = 0.26 \text{ сут}$$

Здесь мы сразу подставили величины массы и расстояния в массах Солнца и а.е. ($R_\odot \approx 1/200$ а.е.), получив период обращения в годах.

Для звезд ГП верна статистическая зависимость:

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^4 = \frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4,$$

где уже применен закон Стефана-Больцмана. Значит, можно выразить радиус звезды через ее массу и температуру:

$$R = R_\odot \left(\frac{M T_\odot}{M_\odot T}\right)^2$$

Температура звезд класса F примерно 8000 K, а масса порядка $1.5M_\odot$ (для примера можно вспомнить, что Вега класса A0 имеет массу, равную $2M_\odot$ или воспользоваться уже написанным соотношением массы и светимости). Получаем, что радиус такой звезды будет равен $R_F = (1.5 \cdot 6/8)^2 R_\odot \approx 1.25R_\odot$. В случае звезды класса K масса обычно порядка $0.5M_\odot$, а температура порядка 4000 K. Получаем оценку радиуса звезды $R_K = (0.5 \cdot 6/4)^2 R_\odot \approx 0.6R_\odot$.

Тогда для периодов будет верно:

$$P_F = P_0 \times \frac{1.25^3}{1.5} = 0.26 \cdot 1.3 = 0.34 \text{ сут;} \qquad P_K = P_0 \times \frac{0.6^3}{0.5} = 0.26 \cdot 0.43 = 0.11 \text{ сут.}$$

В.В.Григорьев

5. Как известно, масса центрального объекта нашей Галактики составляет 4.5×10^6 масс Солнца. Предполагается, что это сверхмассивная черная дыра. Может ли быть так, что вместо этой сверхмассивной черной дыры в центре нашей Галактики находится шаровое скопление равномерной концентрации, состоящее из черных дыр звездных масс? Обоснуйте свой ответ максимально полно.

Решение:

Черная дыра звездной массы — конечный результат эволюции звезды массой от 10 масс Солнца и больше. Так как верхний предел масс звезд ограничен примерно 150 массами Солнца, то очевидно, что масса черной дыры звездной массы не может быть больше этого значения. Для оценки возьмем «среднюю» черную дыру звездной массы в 45 раз более тяжелую, чем наше светило. Также можно вспомнить, что первое зарегистрированное гравитационно-волновое событие представляло собой столкновение двух черных дыр массами 36 и 29 масс Солнца с образованием черной дыры массой 63 массы Солнца, так что наша оценка кажется адекватной.

Получается, что нам нужно 10^5 черных дыр звездной массы (маленьких черных дыр), чтобы заменить одну сверхмассивную (большую). Будем пользоваться шварцшильдовским приближением для простоты.

Шварцшильдовская черная дыра — весьма простой объект с точки зрения математики. Ее гравитационный радиус R_G определяется известной формулой:

$$R_G = \frac{2GM}{c^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса черной дыры, c — скорость света. Из формулы очевидно, что размеры черной дыры прямо пропорциональны массе, таким образом, можно сказать, что радиус r черной дыры звездной массы будет в 10^5 раз меньше, чем радиус R сверхмассивной. Это означает, что объем, занимаемый 10^5 маленькими черными дырами в $(10^5)^3$ раз меньше, чем объем, занимаемый одной большой черной дырой, то есть между этими маленькими черными дырами есть свободное пространство. Выглядит так, будто шаровое скопление может заменить одну большую черную дыру.

Оценим среднее расстояние d между маленькими черными дырами через их концентрацию n, предполагая, что они все равномерно распределены в пределах радиуса $R = 10^5 r$ большой черной дыры:

$$n = \frac{10^5 \text{ шт}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{10^5 \text{ шт}}{4(10^5 r)^3} = \frac{1 \text{ шт}}{4 \times 10^{10} r^3} \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{40 \times 10^9 r^3} \approx 3.4 \times 10^3 r$$

Известно, что любые объекты, подлетевшие на расстояние меньше $3R_G$ к черной дыре звездной массы, будут разорваны приливными силами. Однако, в данном случае среднее расстояние между ними сильно превышает эту величину. Так что мысль о шаровом скоплении подтверждается.

Оценим характерную скорость v маленьких черных дыр в скоплении. Сделать это можно на основании теоремы о вириале (или сразу вспомнить, что она будет равна первой космической скорости на краю скопления):

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Итоговый результат получился хоть и весьма большим, но все же меньшим, чем скорость света, что не нарушает существующие физические законы. Заметим также, что в случае однородной концентрации более близкие черные дыры к центру скопления должны двигаться еще медленнее (при уменьшении R в 2 раза M уменьшается в 8 раз). Таким образом, даже кинематические характеристики не запрещают существование шарового скопления из черных дыр звездных масс вместо одной сверхмассивной черной дыры.

Заметим, что уменьшение средней массы одной черной дыры влечет и уменьшение ее размеров, а значит увеличение среднего расстояния между ними. При этом заменить черные дыры звездами не выйдет: известно, что если сжать Солнце в черную дыру, то оно будет иметь радиус 3 км, а $3 \cdot 3.4 \times 10^3$ км $\approx 10^4$ км уже сравнимо с радиусом Земли, не говоря о Солнце. То есть звезды будут вынуждены непрерывно взаимодействовать друг с другом в таком плотном скоплении.

Теперь попробуем оценить среднее время τ между столкновениями маленьких черных дыр, пренебрегая релятивистскими эффектами, считая, что столкновение произойдет, если две ЧД звездной массы оказались на расстоянии $2r$ друг от друга. Пусть отдельная черная дыра движется со средней скоростью v, а остальные ЧД неподвижны и точечны. Тогда за время τ_0 она пройдет цилиндр объемом $4\pi r^2 v\tau_0$. Если в этот цилиндр попала хотя бы одна ЧД (согласно концентрации n), то столкновение произошло:

$$4\pi r^2 v\tau_0 n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi r^2 nc} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4\times 10^{10} r}{4\pi c} \approx 0.5 \times \frac{r}{c} \times 10^{10} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 45 \cdot 3 \text{ км}}{3\times 10^5 \text{ км/с}} \times 10^{10} = 22.5 \times 10^5 \text{ с} \sim 1 \text{ мес}$$

Здесь мы подставили величину $45 \cdot 3$ км в качестве шварцшильдовского радиуса черной дыры звездной массы. Полученная величина τ_0 характеризует «время жизни» одной конкретной черной дыры (видно, что оно весьма мало). Однако, столкновения могут произойти между двумя любыми ЧД, так что $\tau = 2\tau_0/10^5 = 45$ секунд.

Отсюда следует простой вывод: если в центре нашей Галактики когда-то и находилось шаровое скопление из черных дыр звездных масс, то оно весьма быстро превратилось в одну сверхмассивную черную дыру — как раз за время порядка τ_0. Учет релятивистских эффектов (фактически, увеличение сечения захвата) еще сильнее уменьшает эту оценку.

В.В.Григорьев