XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017

23 ноября

---

10 класс

---

1. «...Но оставим Чуба изливать на досуге свою досаду и возвратимся к кузнецу, потому что уже на дворе, верно, есть час девятый [вечера].

Сначала страшно показалось Вакуле, когда поднялся он от земли на такую высоту, что ничего уже не мог видеть внизу, и пролетел как муха под самым месяцем так, что если бы не наклонился немного, то зацепил бы его шапкою...»

Н.В. Гоголь, «Ночь перед Рождеством»

Какой вид имел месяц, если он находился в верхней кульминации?

Предположим, что в момент пролета «под самым месяцем» последний находился не только в кульминации, но и в зените. Оцените минимально возможное расстояние, которое пришлось преодолеть Вакуле на пути в Петербург.

Решение:

Начнем с первой части задачи. Поскольку на дворе девятый час вечера, то до нижней кульминации Солнца осталось около 4 часов и оно находится где-то в западной части неба (хоть и под горизонтом). Месяц в верхней кульминации (но не обязательно в зените). Следовательно, он «молодой» (освещена правая часть диска Луны), а его фаза несколько больше половины (между первой четвертью и полнолунием).

Вторая часть существенно менее реалистична. Поскольку угол наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики около 5°, то это означает, что оказаться в зените Луна может только на широтах, не больших $\varepsilon + 5^\circ \approx 28^\circ$ ($\varepsilon \approx 23^\circ$ — угол между небесным экватором и эклиптикой). Следовательно, даже в самом оптимальном случае Вакуле необходимо пролететь дугу земного меридиана длиной $60^\circ - 28^\circ = 32^\circ$. Поскольку длина окружности меридиана составляет 40 тыс. км, минимальное расстояние получается равным $32/360 \cdot 40 \approx 4$ тысячи км.

П.А. Тараканов

2. Объект Оумуамуа, не принадлежащий Солнечной системе, пролетел мимо Солнца на минимальном расстоянии 0.25 а.е. С какой скоростью он должен был двигаться при этом относительно Солнца?

Решение:

Так как известно, что объект не принадлежит Солнечной системе, его скорость должна быть не меньше, чем 2-я космическая (параболическая) V_2 на расстоянии 0.25 а.е. Параболическая скорость связана с круговой, т.е. 1-й космической V_1, следующим образом: $V_2 = \sqrt{2}V_1$. Круговая скорость для орбиты радиусом $r = 0.25$ а.е. определяется как

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}},$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, а G — гравитационная постоянная, и все величины выражены в одной системе единиц. Можно также найти эту скорость из III закона Кеплера $r^3/T^2 = 1$, где r выражено в а.е., а T — в земных годах, тогда $V_1 = 2\pi r/T$ будет выражена в а.е./год. Еще один вариант вычислить скорость V_1 появляется, если известна круговая скорость для орбиты Земли (т.е., собственно, скорость движения Земли по орбите). Тогда можно найти отношение круговой скорости Земли $V_\oplus = 30$ км/с и круговой скорости для расстояния 0.25 а.е. V_1:

$$V_1/V_\oplus = (r/r_\oplus)(r_\oplus/r)^{3/2} = 0.25 \cdot 4^{3/2} = 2$$

Тогда скорость, с которой объект должен был двигаться относительно Солнца, не меньше чем

$$V_2 = 30 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 85\,\text{км/с}.$$

Коллектив

3. Уильям Гершель за единицу расстояния в Галактике принял расстояние от Солнца до Сириуса, считая Сириус звездой, подобной Солнцу. Во сколько раз такая единица расстояния меньше настоящего расстояния между данными звездами? Годичный параллакс Сириуса $0''.4$, видимая звездная величина $-1^m.5$.

Решение:

Видимая звездная величина m связана с абсолютной звездной величиной M и параллаксом π следующим образом: $M - m = 5 \lg \pi + 5$. Если бы Сириус был подобен Солнцу, его абсолютная звездная величина равнялась бы абсолютной звездной величине Солнца, т.е. $M = +5^m$. Тогда, его параллакс был бы равен

$$\pi = 10^{\frac{M-m}{5} - 1} = 10^{0.3} \approx 2''$$

Отношение параллаксов равно отношению расстояний, так что У. Гершель занизил расстояние между Солнцем и Сириусом примерно в $2/0.4 = 5$ раз.

А.В.Веселова

4. Существует легенда, что днем из глубокого колодца невооруженным глазом можно увидеть звезды. А сколько в среднем звезд одновременно можно увидеть из глубокого колодца ночью? Глубина колодца 20 м, диаметр — 1 м.

Решение:

Площадь сферы равна 4π стерадиан, или около 42 тысяч кв. градусов, а звезд, видимых невооруженным глазом, на небе около $6 \cdot 10^3$ штук. Тем самым одна такая звезда занимает на небе площадь 7 кв. градусов, т.е. характерное расстояние между двумя соседними звездами около $\sqrt{7} = 2^\circ.6$.

При наблюдении со дна глубокого колодца видна область неба, поперечник которой составляет примерно 1/20 радиана, т.е. несколько менее 3°. Сравнивая этот результат с предыдущим можно сразу заметить, что в среднем со дна колодца можно будет увидеть одну звезду.

Поскольку в основном видимые невооруженным глазом звезды достаточно слабые, то можно отметить, что при неидеальном зрении, наличии засветки и прочих мешающих факторах с большой вероятностью даже эту одну звезду увидеть со дна колодца не получится. Даже ночью.

П.А.Тараканов

5. Обитатели третьей планеты в системе Медузы наблюдают вторую планету в этой же системе. Максимальная элонгация второй планеты составляет 30°. Все планеты в системе движутся по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости. Как часто жители третьей планеты будут наблюдать прохождение второй планеты по диску Медузы?

Решение:

Примем радиус орбиты третьей планеты за 1. Тогда r — радиус орбиты второй планеты в единицах радиуса орбиты третьей планеты. Если максимальная элонгация второй планеты при наблюдении с третьей равна 30°, то $r = \sin 30° = 0.5$. По III закону Кеплера период обращения второй планеты в единицах периода обращения первой равен $T = r^{3/2}$. Синодический период

$$S = \frac{T}{1-T} = \frac{0.5^{3/2}}{1-0.5^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{0.5^{3/2}}-1} = \frac{1}{2^{3/2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}-1} \approx \frac{1}{2.8-1} \approx 0.55.$$

в годах третьей планеты.

Отметим, что это решение неявно предполагает, что планеты обращаются вокруг Медузы в одну сторону. Однако из-за особенностей образования планетных систем ситуация, когда в планетной системе с круговыми орбитами, лежащими в одной плоскости, планеты обращаются в разные стороны, практически невозможна, так что такой вариант и соответствующий ему ответ, хотя его и можно получить аналогичным образом, нереалистичны.

М.В.Костина